

## NOMBRES COMPLEXES

### Exercice 1 :

On donne  $\theta_0$  un réel tel que :  $\cos(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$  et  $\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de  $\theta_0$ ) :

$$a = 3i(2+i)(4+2i)(1+i) \text{ et } b = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$$

Allez à : [Correction exercice 1 :](#)

### Exercice 2 :

Mettre sous la forme  $a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  (forme algébrique) les nombres complexes

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3+6i}{3-4i}; & z_2 &= \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2; & z_3 &= \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \\ z_4 &= \frac{5+2i}{1-2i}; & z_5 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; & z_6 &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \\ z_7 &= -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}; & z_8 &= \frac{1}{(1+2i)(3-i)}; & z_9 &= \frac{1+2i}{1-2i} \end{aligned}$$

Allez à : [Correction exercice 2 :](#)

### Exercice 3 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{\frac{2i\pi}{3}}; & z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}; & z_3 &= 3e^{-\frac{7i\pi}{8}}; & z_4 &= \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right); \\ z_5 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}; & z_6 &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right); & z_7 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}} \end{aligned}$$

$z_8$ , le nombre de module 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$ .

$z_9$  le nombre de module 3 et d'argument  $-\frac{\pi}{8}$ .

Allez à : [Correction exercice 3 :](#)

### Exercice 4 :

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

$$z_1 = 3 + 3i; \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}; \quad z_3 = -\frac{4}{3}i; \quad z_4 = -2; \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \quad \theta \in ]-\pi, \pi[$$

Pour  $z_5$ , factoriser par  $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

$$z_6 = 1 + i; \quad z_7 = 1 + i\sqrt{3}; \quad z_8 = \sqrt{3} + i; \quad z_9 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \quad z_{10} = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in ]-\pi, \pi[$$

Pour  $z_{10}$ , factoriser par  $e^{\frac{i\theta}{2}}$

2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leur conjugués.

$$z_1 = 1 + i(1 + \sqrt{2}); \quad z_2 = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5}); \quad z_3 = \frac{\tan(\varphi) - i}{\tan(\varphi) + i}; \quad z_4 = \frac{1}{1 + i \tan(\theta)}$$

Indication :

Ecrire  $z_1$  sous la forme  $\alpha(e^{i\theta} + e^{2i\theta})$

Calculer  $z_2^5$

3. Calculer

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$$

Allez à : [Correction exercice 4 :](#)

### Exercice 5 :

Effectuer les calculs suivants :

1.  $(3+2i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$  par le nombre complexe de module 3 et d'argument  $-\frac{5\pi}{6}$ .
3. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$  par le nombre complexe de module 3 et d'argument  $-\frac{5\pi}{6}$ .

Allez à : [Correction exercice 5 :](#)

### Exercice 6 :

Etablir les égalités suivantes :

1.

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) (1+i) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$

2.

$$(1-i) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) (\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i \sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$

3.

$$\frac{\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Allez à : [Correction exercice 6 :](#)

### Exercice 7 :

Soit

$$u = 1+i \quad \text{et} \quad v = -1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de  $u$  et  $v$ .
2. Déterminer un argument de  $u$  et un argument de  $v$ .
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de  $u$ .
4. Déterminer le module et un argument de  $\frac{u}{v}$ .
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Allez à : [Correction exercice 7 :](#)

### Exercice 8 :

Calculer le module et un argument de

$$u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = 1-i$$

En déduire le module et un argument de  $\frac{u}{v}$ .

Allez à : [Correction exercice 8 :](#)

**Exercice 9 :**

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i}; z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3; z_3 = (1+i\sqrt{3})^4; z_4 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5;$$

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}; z_6 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$$

Allez à : [Correction exercice 9 :](#)

**Exercice 10 :**

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$z_1 = -1; z_2 = i; z_3 = 1+i; z_4 = -1-i; z_5 = 1+i\sqrt{3};$$

$$z_6 = 3+4i; z_7 = 7+24i; z_8 = 3-4i; z_9 = 24-10i$$

Allez à : [Correction exercice 10 :](#)

**Exercice 11 :**

1. Calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .
2. Calculer les racines carrées de  $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ . En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

Allez à : [Correction exercice 11 :](#)

**Exercice 12 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $z^2 + z + 1 = 0$ .
2.  $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$ .
3.  $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ .
4.  $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$ .
5.  $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$ .
6.  $4z^2 - 2z + 1 = 0$ .
7.  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ .
8.  $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ .
9.  $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$ .
10.  $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$ .
11.  $z^3 + 3z - 2i = 0$ .
12.  $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$ .
13.  $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$ .
14.  $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$ .
15.  $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$ .
16.  $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$ .

Allez à : [Correction exercice 12 :](#)

**Exercice 13 :**

Résoudre l'équation :

$$Z^4 + (3 - 6i)Z^2 - 8 - 6i = 0$$

Allez à : [Correction exercice 13 :](#)

**Exercice 14 :**

$$(1 - i)X^3 - (5 + i)X^2 + (4 + 6i)X - 4i = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2. Résoudre cette équation.

Allez à : [Correction exercice 14 :](#)

**Exercice 15 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$$

Indication : Poser  $Z = z^3$  et résoudre d'abord  $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$ .

Allez à : [Correction exercice 15 :](#)

**Exercice 16 :**

Soit  $(E)$  l'équation

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = 0$$

1. Montrer que  $(E)$  admet des racines réelles.
2. Résoudre  $(E)$ .

Allez à : [Correction exercice 16 :](#)

**Exercice 17 :**

1. Résoudre  $X^3 = -2 + 2i$
2. Résoudre  $Z^3 = -8i$
3. Résoudre

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1 + 3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

On rappelle que  $\sqrt{676} = 26$ .

Allez à : [Correction exercice 17 :](#)

**Exercice 18 :**

Soit l'équation  $z^3 - iz + 1 - i = 0$   $(E)$

1. Montrer que  $(E)$  admet une racine réelle.
2. Déterminer les solutions de  $(E)$ .

Allez à : [Correction exercice 18 :](#)

**Exercice 19 :**

Soit  $(E)$  l'équation

$$X^4 - (3 + \sqrt{3})X^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)X - 2i = 0$$

1. Montrer que  $(E)$  admet des racines réelles.
2. Résoudre  $(E)$ .

Allez à : [Correction exercice 19 :](#)

**Exercice 20 :**

Soit  $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer  $z^2$ , puis déterminer le module et un argument de  $z^2$ , puis écrire  $z^2$  sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de  $z$ .
3. En déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

Allez à : [Correction exercice 20 :](#)

**Exercice 21 :**

1. Donner les solutions de :

$$u^4 = -4$$

Sous forme algébrique et trigonométrique.

2. Donner les solutions de :

$$(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0$$

Sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 21](#) :

### Exercice 22 :

1. Donner les solutions complexes de  $X^4 = 1$ .
2. Résoudre  $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre  $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : [Correction exercice 22](#) :

### Exercice 23 :

Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe

$$\left(\frac{1 + i - \sqrt{3}(1 - i)}{1 + i}\right)^2$$

Allez à : [Correction exercice 23](#) :

### Exercice 24 :

1. Déterminer le module et un argument de  $\frac{1+i}{1-i}$ , calculer  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}$
2. Déterminer le module et un argument de  $1 + i\sqrt{3}$ , calculer  $(1 + i\sqrt{3})^{2010}$
3. Calculer les puissances  $n$ -ième des nombres complexes.

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}; \quad z_2 = 1 + j; \quad z_3 = \frac{1 + i \tan(\theta)}{1 - i \tan(\theta)}; \quad z_4 = 1 + \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

Allez à : [Correction exercice 24](#) :

### Exercice 25 :

Comment choisir l'entier naturel  $n$  pour que  $(\sqrt{3} + i)^n$  soit réel ? Imaginaire ?

Allez à : [Correction exercice 25](#) :

### Exercice 26 :

Soit  $z$  un nombre complexe de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$ , et soit  $\bar{z}$  son conjugué. Calculer

$$(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$$

En fonction de  $\rho$  et  $\theta$ . Et de  $\cos(\theta) \cos(2\theta) \dots \cos(n\theta)$

Allez à : [Correction exercice 26](#) :

### Exercice 27 :

1. Pour quelles valeurs de  $z \in \mathbb{C}$  a-t-on  $|1 + iz| = |1 - iz|$
2. On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions sont réelles. Trouver alors les solutions.

3. Calculer les racines cubiques de  $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

Allez à : [Correction exercice 27](#) :

**Exercice 28 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

Allez à : [Correction exercice 28 :](#)

**Exercice 29 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$$

Allez à : [Correction exercice 29 :](#)

**Exercice 30 :**

1. Déterminer les deux solutions complexes de  $u^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ .
2. Résoudre

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 30 :](#)

**Exercice 31 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^3 = -8$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 31 :](#)

**Exercice 32 :**

On appelle  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $X^3 = 1$  (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique)
2. Montrer que  $\bar{j} = j^2$
3. Montrer que  $j^{-1} = j^2$
4. Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$
5. Calculer  $\frac{1}{1+j}$ .
6. Calculer  $j^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Allez à : [Correction exercice 32 :](#)

**Exercice 33 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$$

Et montrer qu'une seule de ces solutions a une puissance quatrième réelle.

Allez à : [Correction exercice 33 :](#)

**Exercice 34 :**

1. Donner les solutions complexes de  $X^4 = 1$ .

2. Résoudre  $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre  $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : [Correction exercice 34 :](#)

#### Exercice 35 :

Trouver les racines cubiques de  $11 + 2i$ .

Allez à : [Correction exercice 35 :](#)

#### Exercice 36 :

Calculer

$$\frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}}$$

Algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

Allez à : [Correction exercice 36 :](#)

#### Exercice 37 :

Trouver les racines quatrième de 81 et de  $-81$ .

Allez à : [Correction exercice 37 :](#)

#### Exercice 38 :

Soit  $n \geq 2$ , un entier.

1.
  - a. Déterminer les complexes qui vérifient  $z^{2n} = 1$ .
  - b. Déterminer les complexes qui vérifient  $z^n = -1$ .
2. Calculer la somme des complexes qui vérifient  $z^n = -1$ .

Allez à : [Correction exercice 38 :](#)

#### Exercice 39 :

1. Soient  $z_1, z_2, z_3$  trois nombres complexes ayant le même cube.

Exprimer  $z_2$  et  $z_3$  en fonction de  $z_1$ .

2. Donner, sous forme polaire (forme trigonométrique) les solutions dans  $\mathbb{C}$  de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$$

Indication : poser  $Z = z^3$  et calculer  $(9 + i)^2$ .

Allez à : [Correction exercice 39 :](#)

#### Exercice 40 :

Déterminer les racines quatrième de  $-7 - 24i$ .

Allez à : [Correction exercice 40 :](#)

#### Exercice 41 :

Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}; \quad z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}; \quad z^6 + 27 = 0; \quad 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$$

Allez à : [Correction exercice 41 :](#)

**Exercice 42 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

1.  $z^5 = 1$
2.  $z^5 = 1 - i$
3.  $z^3 = 2 - 2i$
4.  $z^5 = \bar{z}$

Allez à : [Correction exercice 42 :](#)

**Exercice 43 :**

1. Calculer les racines  $n$ -ième de  $-i$  et de  $1 + i$ .
2. Résoudre  $z^2 - z + 1 - i = 0$ .
3. En déduire les racines de  $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ .

Allez à : [Correction exercice 43 :](#)

**Exercice 44 :**

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout nombre  $z \in \mathbb{C}$ , on a :

$$(z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z^n - 1$$

Et en déduire que si  $z \neq 1$ , on a :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

2. Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $e^{ix} - 1 = 2ie^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer pour tout  $x \in \mathbb{R}$  la somme :

$$Z_n = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{(n-1)ix}$$

Et en déduire les valeurs de

$$X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos((n-1)x)$$

$$Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin((n-1)x)$$

Allez à : [Correction exercice 44 :](#)

**Exercice 45 :**

Soit  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  une racine cinquième de 1, donc  $\alpha^5 = 1$ .

1. Quelles sont les 4 complexes qui vérifient ces conditions ?
2. Montrer que  $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$
3. Calculer  $1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4$

Indication : On calculera de deux façon différente la dérivée de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

On donnera le résultat sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 45 :](#)

**Exercice 46 :**

Soit  $\epsilon$  une racine  $n$ -ième de l'unité,  $\epsilon \neq 1$  ; calculer

$$S = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1}$$

Allez à : [Correction exercice 46 :](#)

**Exercice 47 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ .

Allez à : [Correction exercice 47 :](#)



**Exercice 48 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^n = \bar{z}$  où  $n \geq 1$ .

Allez à : [Correction exercice 48](#) :

**Exercice 49 :**

Soit  $\beta \in \mathbb{C}$  tel que  $\beta^7 = 1$  et  $\beta \neq 1$ . Montrer que

$$\frac{\beta}{1 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{1 + \beta^4} + \frac{\beta^3}{1 + \beta^6} = -2$$

Allez à : [Correction exercice 49](#) :

**Exercice 50 :**

Linéariser :

$$A(x) = \cos^3(x); B(x) = \sin^3(x); C(x) = \cos^4(x); D(x) = \sin^4(x); E(x) = \cos^2(x) \sin^2(x);$$

$$F(x) = \cos(x) \sin^3(x); G(x) = \cos^3(x) \sin(x); H(x) = \cos^3(x) \sin^2(x);$$

$$I(x) = \cos^2(x) \sin^3(x); J(x) = \cos(x) \sin^4(x)$$

Allez à : [Correction exercice 50](#) :

**Exercice 51 :**

- Déterminer l'ensemble des complexes  $z$  tels que  $\frac{1-z}{1-iz}$  soit réel.
- Déterminer l'ensemble des complexes  $z$  tels que  $\frac{1-z}{1-iz}$  soit imaginaire pur.

Allez à : [Correction exercice 51](#) :

**Exercice 52 :**

- Montrer que  $(1+i)^6 = -8i$
- En déduire une solution de l'équation  $(E) z^2 = -8i$ .
- Ecrire les deux solutions de  $(E)$  sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
- Déduire de la première question une solution de l'équation  $(E_0) z^3 = -8i$ .

Allez à : [Correction exercice 52](#) :

**Exercice 53 :**

Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z(1-z)$

- Déterminer les points fixes de  $f$  c'est-à-dire résoudre  $f(z) = z$ .
- Montrer que si  $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$  alors  $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

$$\text{Indication : } z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$$

Allez à : [Exercice 53](#) :

**Exercice 54 :**

Posons  $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ . Soit  $f: E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$  l'application définie pour tout  $z \in E$  par :

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

- Montrer que l'application est injective.
- Montrer que pour tout  $z \in E$  on a  $f(z) \neq 1$ .
- Démontrer l'égalité

$$f(E) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Que peut-on en déduire sur  $f$ .

- Soit  $z \in E$ . Montrer que

$$1 - |f(z)|^2 = 4 \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z+i|^2}$$

- Notons  $\mathcal{U}$  l'ensemble des complexes de module 1. Montrer que l'on a

$$f(\mathbb{R}) = \mathcal{U} \setminus \{1\}$$

Allez à : **Correction exercice 54 :**

## CORRECTIONS

### Correction exercice 1 :

$$\begin{aligned}|a| &= |3i(2+i)(4+2i)(1+i)| = |3i| \times |2+i| \times |4+2i| \times |1+i| \\&= 3 \times \sqrt{2^2+1^2} \times 2 \times |2+i| \times \sqrt{1^2+1^2} = 6 \left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^2 \times \sqrt{2} = 6 \times 5\sqrt{2} \\&= 30\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(a) &= \arg(3i(2+i)(4+2i)(1+i)) = \arg(3i) + \arg(2+i) + \arg(4+2i) + \arg(1+i) + 2k\pi \\&= \frac{\pi}{2} + \arg(2+i) + \arg(2(2+i)) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\&= \frac{3\pi}{4} + \arg(2+i) + \arg 2 + \arg(2+i) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\arg(2+i) + 2k\pi\end{aligned}$$

Soit  $\theta$  un argument de  $2+i$ ,  $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$  et  $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$  donc  $\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$  et  $\sin(\theta) = \sin(\theta_0)$ , on en déduit que  $\theta = \theta_0 + 2k\pi$

Par suite

$$\begin{aligned}\arg(a) &= \frac{3\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi \\|b| &= \left| \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i} \right| = \frac{|4+2i| \times |-1+i|}{|2-i| \times |3i|} = \frac{2 \times |2+i| \times \sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2} \times 3} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times 3} \\&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(b) &= \arg(4+2i) + \arg(-1+i) - \arg(2-i) - \arg(3i) + 2k\pi = \theta_0 + \frac{3\pi}{4} - (-\theta_0) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\&= \frac{\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 1 :**

### Correction exercice 2 :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{3+6i}{3-4i} = z_1 = \frac{(3+6i)(3+4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{9+12i+18i-24}{25} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \\z_2 &= \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{2+i+2i-1}{2^2+(-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{1+6i-9}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}z_2 &= \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{1+2i-1}{4-4i-1} = \frac{2i}{3-4i} = \frac{2i(3+4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{6i-8}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i \\z_3 &= \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{(2+5i)(1+i) + (2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1^2-i^2} \\&= -\frac{6}{2} = -3\end{aligned}$$

Autre méthode

$$z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{2+5i}{1-i} + \overline{\frac{2+5i}{1-i}} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)$$

Or

$$\frac{2+5i}{1-i} = \frac{(2+5i)(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \frac{2+2i+5i-5}{2} = \frac{-3+7i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$$

Donc

$$\begin{aligned} z_3 &= 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -3 \\ z_4 &= \frac{5+2i}{1-2i} = \frac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{5+10i+2i-4}{5} = \frac{-1+12i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{12}{5}i \\ z_5 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} \times i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{1}{8} + i\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = 1 \end{aligned}$$

Autre méthode

$$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$$

Ou encore

$$\begin{aligned} z_5 &= j^3 = 1 \\ z_6 &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \end{aligned}$$

On peut toujours s'amuser à développer  $(1+i)^9$  et  $(1-i)^7$  mais franchement ce n'est pas une bonne idée.

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2 \frac{(1+i)^7}{(1-i)^7} = (1+i)^2 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 = (1+2i-1) \left(\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}\right)^7 \\ &= 2i \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^7 = \frac{2i(2i)^7}{2^7} = \frac{2^8 i^8}{2^7} = 2i^8 = 2 \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^7} = \frac{(\sqrt{2})^9 \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{(\sqrt{2})^7 \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7} = \frac{(\sqrt{2})^2 e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)} = 2e^{\frac{16i\pi}{4}} = 2e^{4i\pi} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2} = -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} z_7 &= -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{j} = \frac{j^2}{j^3} = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_8 &= \frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{3-i+6i+2} = \frac{1}{5+5i} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+i} = \frac{1}{5} \times \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i \\ z_9 &= \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{(1+2i)^2}{5} = \frac{1+4i-4}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 2 :**

**Correction exercice 3 :**

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2 \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3} \\
z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
z_3 &= 3e^{-\frac{7i\pi}{8}} = 3 \left( \cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right) \right) = 3 \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) - 3i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\
&= 3 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) - 3i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -3 \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) - 3i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \\
&= -3 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 3i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
z_4 &= \left( 2e^{\frac{i\pi}{4}} \right) \left( e^{-\frac{3i\pi}{4}} \right) = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i \\
z_5 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\pi} = -2 \\
z_6 &= \left( 2e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \left( 3e^{\frac{5i\pi}{6}} \right) = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{\frac{7i\pi}{6}} = 6 \left( \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) = 6 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\
&= -3\sqrt{3} - 3i \\
z_7 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}} = \frac{2}{3} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3} e^{\frac{8i\pi}{6}} = \frac{2}{3} e^{\frac{4i\pi}{3}} = \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{3} - i \frac{\sqrt{3}}{3} \\
z_8 &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3} \\
z_9 &= 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 3i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

A moins de connaître  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$  on ne peut pas faire mieux.

Allez à : **Exercice 3 :**

#### Correction exercice 4 :

1.  $z_1 = 3(1 + i)$  donc  $|z_1| = 3|1 + i| = 3 \times \sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$

Si on ne met pas 3 en facteur

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

C'est moins simple.

On appelle  $\theta_1$  un argument de  $z_1$

$$\cos(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc  $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et  $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , et  $\bar{z}_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_1 = 3\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ soit } \theta_2 \text{ un argument de } z_2$$

$$\cos(\theta_2) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc  $\theta_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et  $z_2 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_2 = 2 \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\text{Et } \overline{z_2} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Pour  $z_3$  la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.

$$z_3 = -\frac{4}{3}i = -\frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Cette forme n'est pas la forme trigonométrique car  $-\frac{4}{3}$  est négatif, ce n'est donc pas le module, mais

$$-1 = e^{i\pi}, \text{ donc } z_3 = \frac{4}{3}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}e^{i(\frac{\pi}{2}+\pi)} = \frac{4}{3}e^{\frac{3i\pi}{2}} = \frac{4}{3}e^{-\frac{i\pi}{2}}.$$

On aurait pu directement écrire que  $-i = e^{\frac{3i\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}}$ .

$$\text{Et } \overline{z_3} = \frac{4}{3}e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Pour  $z_4$  la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.

$$z_4 = -2 = 2e^{i\pi}$$

$$\text{Et } \overline{z_4} = e^{-i\pi} = e^{i\pi}$$

C'est plus dur

$$z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}} \left( e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = e^{\frac{3i\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

Comme  $-\pi < \theta < \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$  par conséquent  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ , ce qui signifie que  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est bien le module.

$$\text{Et } \overline{z_5} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{3i\theta}{2}}$$

$$|z_6| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{ soit } \theta_6 \text{ un argument de } z_6$$

$$\cos(\theta_6) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_6) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc } \theta_6 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_6 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Et } \overline{z_6} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$|z_7| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ soit } \theta_7 \text{ un argument de } z_7$$

$$\cos(\theta_7) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_7) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } \theta_7 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } z_7 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_7 = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Et } \overline{z_7} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_8| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ soit } \theta_8 \text{ un argument de } z_8$$

$$\cos(\theta_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_8) = \frac{1}{2}$$

Donc  $\theta_8 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et  $z_8 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_8 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$$

Première méthode

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3} - i}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{6}}} = e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Deuxième méthode

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3}}{4} = \frac{4i}{4} = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

C'est plus dur

$$z_{10} = 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left( e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = e^{\frac{i\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}$$

Comme  $-\pi < \theta < \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$  par conséquent  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ , ce qui signifie que  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est bien le module.

$$\text{Et } \overline{z_{10}} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\theta}{2}}$$

2. Faisons comme d'habitude

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Soit  $\theta_1$  un argument de  $z_1$

$$\cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

L'ennui c'est que l'on ne connaît pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs. Il faut être malin.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i(1 + \sqrt{2}) = 1 + i + \sqrt{2}i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2}i = \sqrt{2} \left( e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \left( e^{-\frac{i\pi}{8}} + e^{\frac{i\pi}{8}} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{\frac{3i\pi}{8}} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \text{ donc } \theta_1 = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et } |z_1| = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Remarque :

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Le module de  $\overline{z_1}$  est aussi  $2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$  et un argument est  $-\frac{3\pi}{8}$ .

Faisons comme d'habitude

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5}) \\ |z_2| &= \sqrt{\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^2 + (1 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Soit  $\theta_2$  un argument de  $z_2$

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

L'ennui c'est que l'on ne connaît pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs.

Calculons  $z_2^5$

$$\begin{aligned}
 z_2^5 &= \left( \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5}) \right)^5 \\
 &= \left( \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^5 + 5 \left( \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^4 i(1 - \sqrt{5}) + 10 \left( \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^3 (i(1 - \sqrt{5}))^2 \\
 &\quad + 10 \left( \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^2 (i(1 - \sqrt{5}))^3 + 5 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} (i(1 - \sqrt{5}))^4 + (i(1 - \sqrt{5}))^5 \\
 &= (10 + 2\sqrt{5})^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 5i(10 + 2\sqrt{5})^2 (1 - \sqrt{5}) \\
 &\quad - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - 10i(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^3 \\
 &\quad + 5\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^4 + i(1 - \sqrt{5})^5 \\
 &= \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \left( (10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + 5(1 - \sqrt{5})^4 \right) \\
 &\quad + i(1 - \sqrt{5}) \left( 5(10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + (1 - \sqrt{5})^4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + 5(1 - \sqrt{5})^4 \\
 &\quad = 100 + 40\sqrt{5} + 20 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5} + 5) \\
 &\quad + 5(1 - 4\sqrt{5} + 6 \times (\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{5})^3 + (\sqrt{5})^4) \\
 &\quad = 120 + 40\sqrt{5} - 10(10 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5}) + 5(56 - 24\sqrt{5}) \\
 &\quad = 120 + 40\sqrt{5} - 10(60 - 20\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 20) + 280 - 120\sqrt{5} = 0 \\
 &5(10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + (1 - \sqrt{5})^4 \\
 &\quad = 5(100 + 40\sqrt{5} + 20) - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5} + 5) \\
 &\quad + (1 - 4\sqrt{5} + 6 \times (\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{5})^3 + (\sqrt{5})^4) \\
 &\quad = 600 + 200\sqrt{5} - 10(40 - 8\sqrt{5}) + 56 - 24\sqrt{5} = 2566 + 256\sqrt{5} \\
 &\quad = 256(1 + \sqrt{5}) \\
 &z_2^5 = 256i(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 256i \times (-4) = -2^{10}i
 \end{aligned}$$

Ensuite il faut trouver les solutions de  $Z^5 = -2^{10}i = 2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$$\begin{aligned}
 Z^5 = -2^{10}i = 2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}} &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z^5| = 2^{10} \\ \arg(Z^5) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 2^2 \\ 5 \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 4 \\ \arg(Z) = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$Z_0 = 4e^{-i\frac{\pi}{10}}; \quad Z_1 = 4e^{\frac{3i\pi}{10}}; \quad Z_2 = 4e^{\frac{7i\pi}{10}}; \quad Z_3 = 4e^{\frac{11i\pi}{10}}; \quad Z_4 = 4e^{\frac{15i\pi}{10}} = -4i$$

Parmi ces cinq complexes, le seul qui a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative est  $4e^{-i\frac{\pi}{10}}$  d'où  $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{10}}$  donc un argument de  $z_2$  est  $-\frac{\pi}{10}$ .

Le module de  $\overline{z_2}$  est 4 et un argument est  $\frac{\pi}{10}$ .

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{\tan(\varphi) - i}{\tan(\varphi) + i} = \frac{(\tan(\varphi) - i)(\tan(\varphi) - i)}{\tan^2(\varphi) + 1^2} = \frac{\tan^2(\varphi) - 2i \tan(\varphi) - 1}{\cos^2(\varphi)} \\
&= \cos^2(\varphi) (\tan^2(\varphi) - 1) - 2i \cos^2(\varphi) \tan(\varphi) \\
&= \cos^2(\varphi) \left( \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} - 1 \right) - 2i \cos^2(\varphi) \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\
&= -(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) - 2i \sin(\varphi) \cos(\varphi) = -\cos(2\varphi) - i \sin(2\varphi) \\
&= -(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) = e^{i\pi} e^{-2i\varphi} = e^{i(\pi-2\varphi)}
\end{aligned}$$

Le module de  $z_3$  est 1 et un argument est  $\pi - 2\varphi$

Autre méthode

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{\tan(\varphi) - i}{\tan(\varphi) + i} = \frac{i(\tan(\varphi) - i)}{i(\tan(\varphi) + i)} = \frac{i \tan(\varphi) + 1}{i \tan(\varphi) - 1} = \frac{i \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} + 1}{i \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} - 1} = \frac{i \sin(\varphi) + \cos(\varphi)}{i \sin(\varphi) - \cos(\varphi)} \\
&= \frac{\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)}{-(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi))} = -\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = -e^{2i\varphi} = e^{i\pi} e^{2i\varphi} = e^{i(\pi+2\varphi)}
\end{aligned}$$

Un argument de  $\overline{z_3}$  est  $-\pi - 2\varphi$

$$z_4 = \frac{1}{1 + i \tan(\theta)} = \frac{1}{1 + i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{e^{i\theta}} = \cos(\theta) e^{-i\theta}$$

Si  $\theta$  est tel que  $\cos(\theta) > 0$  alors  $|z_4| = \cos(\theta)$  et un argument de  $z_4$  est  $-\theta$

Si  $\theta$  est tel que  $\cos(\theta) < 0$  alors  $|z_4| = -\cos(\theta)$  et un argument de  $z_4$  est  $-\theta + \pi$

3. On sait que  $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  donc  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j^2$

$$\left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{2010} = (-j^2)^{2010} = (j^2)^{2010} = j^{4020} = j^{3 \times 1340} = (j^3)^{1340} = 1^{1340} = 1$$

Allez à : Exercice 4 :

**Correction exercice 5 :**

$$1. (3 + 2i)(1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 3 - 7i + 6 = 9 - 7i$$

2.

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i(-\frac{5\pi}{6})} = 6e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = 6e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -6i$$

3.

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i(-\frac{5\pi}{6})}} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} e^{\frac{5i\pi}{6}} = \frac{2}{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6})} = \frac{2}{3} e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

Allez à : Exercice 5 :

**Correction exercice 6 :**

1.

$$\begin{aligned}
&\left( \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) (1 + i) = e^{i\frac{\pi}{7}} e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{7}} e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i(\frac{12\pi}{84} - \frac{28\pi}{84} + \frac{21\pi}{84})} = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{84}} = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right) \right)
\end{aligned}$$

2.



$$\begin{aligned}
(1-i) \left( \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) (\sqrt{3}-i) &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\
&= 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{5}} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{15\pi}{60} + \frac{12\pi}{60} - \frac{10\pi}{60}\right)} = 2\sqrt{2} e^{-\frac{13i\pi}{60}} \\
&= 2\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i \sin\left(\frac{13\pi}{60}\right) \right) \\
\frac{\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)}{1+i} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{-\frac{2i\pi}{12}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 6 :

### Correction exercice 7 :

- $|u| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  et  $|v| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
- 

$$u = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc un argument de  $u$  est  $\frac{\pi}{4}$ .

$$v = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Donc un argument de  $v$  est  $\frac{2\pi}{3}$ .

- On cherche les solutions complexes de  $z^3 = u$

$$\begin{aligned}
z^3 = u &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 3 \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}
\end{aligned}$$

$u$  admet trois racines cubiques

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}; \quad z_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

- 

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5i\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

Et

$$\frac{u}{v} = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{4}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Allez à : Exercice 7 :

**Correction exercice 8 :**

$$|u| = \frac{|\sqrt{6} - i\sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2 \times 3} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc  $|u| = \sqrt{2}$  et un argument de  $u$  est  $-\frac{\pi}{6}$ .

$$|v| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$v = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc  $|v| = \sqrt{2}$  et un argument de  $v$  est  $-\frac{\pi}{4}$ .

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc  $\left| \frac{u}{v} \right| = 1$  et un argument de  $\frac{u}{v}$  est  $\frac{\pi}{12}$ .

Allez à : **Exercice 8 :**

**Correction exercice 9 :**

$$z_1 = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2 + 1^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^3 = \left( e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

$$z_3 = (1+i\sqrt{3})^4 = \left( 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^4 = 2^4 \left( e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^4 = 16 e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$z_4 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = \left( 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^5 + \left( 2 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^5 = 2^5 \left( e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^5 + 2^5 \left( e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^5$$

$$= 32 \left( e^{\frac{5i\pi}{3}} + e^{-\frac{5i\pi}{3}} \right) = 32 \times 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 64 \left( -\frac{1}{2} \right) = -32$$

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Autre méthode

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2 + 2i)}{2^2 + (-2)^2} = \frac{2\sqrt{6} + 2i\sqrt{6} - 2i\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{8} = \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

Remarque : il aurait mieux valu mettre  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  en facteur d'entrée.

Là on est mal parti, il va falloir trouver le module, puis le mettre en facteur,

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))$$

$$|z_6| = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 2\sqrt{2} = 1$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Mais on ne connaît pas d'angle vérifiant cela. Il faut faire autrement

$$|\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Allez à : **Exercice 9 :**

### Correction exercice 10 :

On cherche les nombres complexes tels que  $z^2 = -1$

$$Z_1 = -i \quad \text{et} \quad Z_2 = i$$

On cherche les nombres complexes tels que  $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que  $z^2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_1 = -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connaît pas les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$(a + ib)^2 = 1 + i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 1 \\ L_2 & 2ab = 1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation  $L_3$

$$|(a + ib)^2| = |1 + i| \Leftrightarrow |a + ib|^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2}$$

En faisant la somme de  $L_1$  et de  $L_3$

$$2a^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de  $L_3$  et de  $L_1$

$$2b^2 = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après  $L_2$   $a$  et  $b$  sont de même signe donc les deux solutions de  $z^2 = 1 + i$  sont

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que  $z^2 = -1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$$Z_1 = -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connaît pas les valeurs de  $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$(a + ib)^2 = -1 - i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = -1 \\ L_2 & 2ab = -1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation  $L_3$

$$|(a + ib)^2| = |-1 - i| \Leftrightarrow |a + ib|^2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2}$$

En faisant la somme de  $L_1$  et de  $L_3$

$$2a^2 = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de  $L_3$  et de  $L_1$

$$2b^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après  $L_2$   $a$  et  $b$  sont de signes opposés donc les deux solutions de  $z^2 = -1 - i$  sont

$$Z_1 = \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que  $z^2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que  $Z^2 = 3 + 4i$

On pose  $Z = a + ib$ ,  $Z^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 3 \\ L_2 & 2ab = 4 \end{cases}$

On rajoute l'équation  $|Z^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25} = 5 \quad L_3$

Avec le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$ , en faisant la somme des deux équations  $L_1$  et  $L_3$ , on trouve  $2a^2 = 8 \Leftrightarrow$

$a^2 = 4$ , d'où l'on tire  $b^2 = 1$ . Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm 2$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm 1$ , d'après l'équation  $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$ , on en déduit que  $ab > 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de même signe.

Si  $a = 2$  alors  $b = 1$  et  $Z_1 = 2 + i$  et si  $a = -2$  alors  $b = -1$  et  $Z_2 = -2 - i$

Deuxième méthode

$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$  et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de  $A^2 - 3A - 4 = 0$  sont  $A_1 = -1 < 0$  et  $A_2 = 4$ , donc  $a^2 = 4$ ,

Si  $a = -2$  alors  $b = \frac{2}{a} = -1$  et alors  $Z_2 = -2 - i$ , si  $a = 2$  alors  $b = \frac{2}{a} = 1$  et alors  $Z_1 = 2 + i$ .

On cherche les nombres complexes tels que  $Z^2 = -7 - 24i$

On pose  $Z = a + ib$ ,  $Z^2 \Leftrightarrow -7 - 24i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -7 - 24i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow$

$$L_1 \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \end{cases}$$

$$L_2 \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$\begin{aligned} |Z^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} \\ &= 25 \quad L_3 \end{aligned}$$

Avec le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$ , en faisant la somme des deux équations  $L_1$  et  $L_3$ , on trouve  $2a^2 =$

$18 \Leftrightarrow a^2 = 9$ , d'où l'on tire  $b^2 = 16$ . Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm 3$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm 4$ , d'après l'équation  $2ab = -24 \Leftrightarrow ab = -12$ , on en déduit que  $ab < 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de signe opposé.

Si  $a = 3$  alors  $b = -4$  et  $Z_1 = 3 - 4i$  et si  $a = -3$  alors  $b = 4$  et  $Z_2 = -3 + 4i$

Deuxième méthode

$-7 - 24i = 9 - 24i - 16 = (3 - 4i)^2$  et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-12}{a}\right)^2 = -7 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{144}{a^2} = -7 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 144 = -7a^2 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 7a^2 - 144 = 0 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 7A - 144 = 0 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases}$$

Les solutions de  $A^2 + 7A - 144 = 0$  sont  $A_1 = -16 < 0$  et  $A_2 = 9$ , donc  $a^2 = 9$ ,

Si  $a = 3$  alors  $b = -\frac{12}{a} = -4$  et alors  $Z_2 = 3 - 4i$ , si  $a = -3$  alors  $b = -\frac{12}{a} = 4$  et alors  $Z_1 = -3 + 4i$ .

On cherche les nombres complexes tels que  $Z^2 = 3 - 4i = z_8$ , on peut refaire comme précédemment mais on va prendre la méthode la plus simple

$$Z^2 = 3 - 4i = 4 - 4i - 1 = (2 - i)^2$$

Il y a deux solutions

$$Z_1 = 2 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = -2 + i$$

On cherche les complexes  $Z$  tels que  $Z^2 = z_9 = 24 - 10i$

Là encore, on va aller au plus simple

$$24 - 10i = 25 - 10i - 1 = (5 - i)^2$$

Donc il y a deux solutions

$$Z_1 = 5 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = -5 + i$$

Allez à : **Exercice 10 :**

### Correction exercice 11 :

1. On cherche les complexes  $Z$  tels que

$$Z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose  $Z = a + ib$ ,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ L_2 & 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad L_3$$

Avec le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ , en faisant la somme des deux équations  $L_1$  et  $L_3$ , on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de  $L_3$  et de  $L_1$

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ , d'après l'équation

$2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , on en déduit que  $ab > 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de même signe.

Si  $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  alors  $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$  et  $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Et si  $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  alors  $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$  et  $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions  $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{8}} = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Comme  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$  et que  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

2. On cherche les complexes  $Z$  tels que

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On pose  $Z = a + ib$ ,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ L_2 & 2ab = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \quad L_3$$

Avec le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ , en faisant la somme des deux équations  $L_1$  et  $L_3$ , on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

En faisant la différence de  $L_3$  et de  $L_1$

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ , d'après l'équation

$2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , on en déduit que  $ab > 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de même signe.

Si  $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$  alors  $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$  et  $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Et si  $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$  alors  $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$  et  $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Admet deux solutions  $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{12}} = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Comme  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$  et que  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Allez à : Exercice 11 :

**Correction exercice 12 :**

1.  $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2$$

$$z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$$

Allez à : Exercice 12 :

2.  $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$

$$\Delta = (-(5i + 14))^2 - 4 \times 2(5i + 12) = (-25 + 140i + 196) - 40i - 96 = 75 + 100i = 25(3 + 4i) \\ = 5^2(3 + 4i)$$

On cherche  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$(a + ib)^2 = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 3 \\ L_2 & 2ab = 4 \\ L_3 & a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases}$$

En faisant  $L_1 + L_3$  on trouve que  $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$

En faisant  $L_3 - L_2$  on trouve que  $2b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$

D'après  $L_2$   $a$  et  $b$  sont de même signe donc  $a + ib = 2 + i$  ou  $a + ib = -2 - i$

Autre méthode  $3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$

et alors

$$\Delta = 5^2(2 + i)^2 = (10 + 5i)^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{5i + 14 - (10 + 5i)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z_2 = \frac{5i + 14 + (10 + 5i)}{2} = \frac{24 + 10i}{2} = 12 + 5i$$

Allez à : Exercice 12 :

3.  $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - ij$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + ij^2$$

Allez à : Exercice 12 :

4.  $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

$$z_1 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i$$

$$z_2 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$$

Allez à : Exercice 12 :

$$5. \quad z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-(3 + 4i))^2 - 4(-1 + 5i) = 9 + 24i - 16 + 4 - 20i = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{3 + 4i - (1 - 2i)}{2} = 2 + 3i$$

$$z_2 = \frac{3 + 4i + 1 - 2i}{2} = 2 + i$$

Allez à : Exercice 12 :

$$6. \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0$$

Soit on résout « normalement », soit on ruse, rusons

$$4z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$$

Avec  $Z = -2z$ . Les solutions de  $Z^2 + Z + 1 = 0$  sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1 = j \quad \text{et} \quad Z_2 = j^2$$

Par conséquent

$$z_1 = -\frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}j^2$$

Allez à : Exercice 12 :

$$7. \quad z^4 + 10z^2 + 169 = 0$$

On pose  $Z = z^2$ ,  $Z^2 + 10Z + 169 = 0$  a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10 - 26)(10 + 26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-10 + 24i}{2} = -5 + 12i$$

$$Z_2 = \frac{-10 - 24i}{2} = -5 - 12i$$

On cherche  $z = a + ib$  tel que

$$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a + ib)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \\ L_2 \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \\ L_3 \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \end{cases}$$

En faisant la somme de  $L_1$  et de  $L_3$ , on trouve que  $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$ ,

En faisant la différence de  $L_3$  et de  $L_1$ , on trouve que  $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$ ,

D'après  $L_2$ ,  $a$  et  $b$  sont de même signe donc  $z^2 = Z_1$  a deux solutions

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 - 3i$$

On peut résoudre de la même façon  $Z_2 = z^2$  ou dire que  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$  est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent  $\overline{z_1} = 2 - 3i$  et  $\overline{z_2} = -2 + 3i$  sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

Allez à : Exercice 12 :

$$8. \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0$$

On peut faire comme dans le 7°, mais rusons :

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z^2}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j\right]\left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^4\right]\left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{2}j^2)(z + \sqrt{2}j^2)(z - \sqrt{2}j)(z + \sqrt{2}j) = 0$$

Les solutions sont

$$\{\sqrt{2}j^2, -\sqrt{2}j^2, \sqrt{2}j, -\sqrt{2}j\}$$



Allez à : Exercice 12 :

$$9. x^4 - 30x^2 + 289 = 0$$

On pose  $X = x^2$

$$X^2 - 30X + 289 = 0$$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 289 = 900 - 1156 = -256 = -16^2 = (16i)^2$$

$$X_1 = \frac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i$$

$$X_2 = 15 + 8i$$

On cherche  $x$  tel que  $x^2 = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = (4 - i)^2$

Il y a donc deux solutions  $x_1 = 4 - i$  et  $x_2 = -(4 - i) = -4 + i$ .

De même on cherche  $x$  tel que  $x^2 = 15 + 8i = 16 + 8i - 1 = (4 + i)^2$

Il y a donc deux solutions  $x_3 = 4 + i$  et  $x_4 = -(4 + i) = -4 - i$ .

Les solutions sont

$$\{4 - i, -4 + i, 4 + i, -4 - i\}$$

Allez à : Exercice 12 :

$$10. x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$$

Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).

$x = 1$  est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de  $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$  donc

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^4 - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |(x + 1)^4| = 16 \\ \arg((x + 1)^4) = \arg(16) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1|^4 = 2^4 \\ 4 \arg(x + 1) = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1| = 2 \\ \arg(x + 1) = \frac{2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases} \Leftrightarrow x_k + 1 = 2e^{\frac{ik\pi}{2}},$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow x_k = -1 + 2e^{\frac{ik\pi}{2}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x_0 = -1 + 2 = 1; \quad x_1 = -1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 + 2i;$$

$$x_2 = -1 + 2e^{i\pi} = -1 - 2 = -3; \quad x_3 = -1 + 2e^{\frac{3i\pi}{2}} = -1 - 2i$$

Sont les solutions.

Allez à : Exercice 12 :

$$11. z^3 + 3z - 2i = 0$$

On voit que  $i$  est une solution évidente (car  $i^3 + 3i - 2i = 0$ ) donc on peut mettre  $z - i$  en facteur.

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-ia + b)z^2 + (-ib + c)z - ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia = i \\ c = 3 + ib = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$$

Le discriminant de  $z^2 + iz + 2$  est  $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z = \frac{-i - 3i}{2} = -2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i + 3i}{2} = i$$

Il y a donc deux solutions,  $z_1 = i$  et  $z_2 = -2i$ .

Allez à : Exercice 12 :

$$12.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + a)^2(1 + i)^2 - 4(1 + a^2)i = (1 + 2a + a^2)(1 + 2i - 1) - 4i - 4ia^2 \\ &= 2i + 4ia + 2ia^2 - 4i - 4ia^2 = -2i + 4ia - 2ia^2 = -2i(1 - 2a + a^2) \\ &= (1 - i)^2(1 - a)^2 = ((1 - i)(1 - a))^2 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{(1+a)(1+i) - (1-i)(1-a)}{2} = \frac{1+i+a+ia - (1-a-i+ia)}{2} = a+i$$

$$z_1 = \frac{(1+a)(1+i) + (1-i)(1-a)}{2} = \frac{1+i+a+ia + 1-a-i+ia}{2} = 1+ia$$

Allez à : Exercice 12 :

$$13. \Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 25 - 10i + 24 + 8i = -2i$$

Il faut trouver  $\delta$  tel que  $\Delta = \delta^2$

Première méthode :

$$-2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2 \text{ c'est une identité remarquable. Donc } \delta_1 = 1-i \text{ ou } \delta_2 = -1+i$$

Deuxième méthode

$$\text{On pose } \delta = a+ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -2i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -2i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$$

$$\text{On rajoute l'équation } |\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-2i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Avec le système } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}, \text{ en faisant la somme des deux équations, on trouve } 2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1,$$

d'où l'on tire  $b^2 = 1$ . Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm 1$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm 1$ , d'après l'équation  $2ab = -2 \Leftrightarrow ab = -1$ , on en déduit que  $ab < 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de signe opposé.

Si  $a = 1$  alors  $b = -1$  et  $\delta = 1-i$  et si  $a = -1$  alors  $b = 1$  et  $\delta = -1+i$ . Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Troisième méthode

$$\Delta = -2i = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}, \text{ donc les racines deuxièmes de } \Delta \text{ sont } \delta = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i \text{ et } \delta = -\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = 1-i.$$

Pour résoudre  $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$ , on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple  $\delta = 1-i$ .

Les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1-5i) - (1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = \frac{-1+3i}{i} = \frac{(-1+3i)(-i)}{i(-i)} = 3+i$$

$$z_2 = \frac{-(1-5i) + (1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

Allez à : Exercice 12 :

14.

$$\Delta = (-(3+i))^2 - 4(1+i)(-6+4i) = (3+i)^2 - 4(-6+4i-6i-4) = 9-1+6i-4(-10-2i) = 8+6i+40+8i = 48+14i$$

$$\text{On pose } \delta = a+ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 48+14i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow 48+14i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |48+14i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2|24+7i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{24^2+7^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{576+49} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{625} = 2 \times 25 = 50$$

$$\text{Avec le système } \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases}, \text{ en faisant la somme des deux équations, on trouve } 2a^2 = 98 \Leftrightarrow a^2 = 49,$$

d'où l'on tire  $b^2 = 1$ . Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm 7$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm 1$ , d'après l'équation  $2ab = 14 \Leftrightarrow ab = 7$ , on en déduit que  $ab > 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de même signe.

Si  $a = 7$  alors  $b = 1$  et  $\delta = 7+i$  et si  $a = -7$  alors  $b = -1$  et  $\delta = -7-i$

Deuxième méthode

$$\Delta = 48+14i = 49+2 \times 7i - 1 = (7+i)^2 \text{ donc } \delta = 7+i \text{ ou } \delta = -7-i.$$

### Troisième méthode

On reprend le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{7}{a}\right)^2 = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{49}{a^2} = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 49 = 48a^2 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^4 - 48a^2 - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 48A - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases}, \text{ le discriminant de } A^2 - 48A - 49 = 0 \text{ est } \Delta' = 48^2 +$$

$4 \times 49 = 2500 = 50^2$  donc ses solutions sont  $A_1 = \frac{48-50}{2} = -1$  et  $A_2 = \frac{48+50}{2} = 49$ ,  $A_1 < 0$  donc il n'y a pas de solution de  $a^2 = -1$ , par contre  $a^2 = 49$  admet deux solutions  $a = -7$  et  $a = 7$ .

Si  $a = -7$  alors  $b = \frac{7}{a} = -1$  et si  $a = 7$  alors  $b = \frac{7}{a} = 1$ , on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de  $(1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$  sont :

$$z_1 = \frac{(3+i) - (7+i)}{2(1+i)} = -\frac{4}{2(1+i)} = -\frac{2}{1+i} = -\frac{2(1-i)}{1^2+1^2} = -1+i$$

$$z_2 = \frac{(3+i) + (7+i)}{2(1+i)} = \frac{10+2i}{2(1+i)} = \frac{5+i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{5-5i+i+1}{1^2+1^2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$$

Allez à : **Exercice 12 :**

15.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(9+3i))^2 - 4(1+2i)(-5i+10) = (3(3+i)^2) - 4(-5i+10+10+20i) \\ &= 9(9-1+6i) - 4(-25) = 9(8+6i) - 4(20+15i) = 72+54i-80-60i \\ &= -8-6i \end{aligned}$$

On pose  $\delta = a + ib$ ,  $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8-6i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -8-6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

On rajoute l'équation  $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8-6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64+36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$ , en faisant la somme des deux équations, on trouve  $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 =$

1, d'où l'on tire  $b^2 = 9$ . Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm 1$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm 3$ , d'après l'équation  $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$ , on en déduit que  $ab < 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de signe opposé.

Si  $a = 1$  alors  $b = -3$  et  $\delta = 1 - 3i$  et si  $a = -1$  alors  $b = 3$  et  $\delta = -1 + 3i$

### Deuxième méthode

On reprend le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^4 - 9 = -8a^2 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 8A - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}, \text{ le discriminant de } A^2 + 8A - 9 = 0 \text{ est}$$

$\Delta' = 8^2 + 4 \times 9 = 100 = 10^2$  donc ses solutions sont  $A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$  et  $A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1$ ,  $A_2 < 0$  donc il n'y a pas de solution de  $a^2 = -9$ , par contre  $a^2 = 1$  admet deux solutions  $a = -1$  et  $a = 1$ .

Si  $a = -1$  alors  $b = \frac{-3}{a} = 3$  et si  $a = 1$  alors  $b = \frac{-3}{a} = -1$ , on retrouve les mêmes solutions.

### Troisième méthode

$$\Delta = -8-6i = 1-6i-9 = (1-3i)^2 \text{ donc } \delta = 1-3i \text{ et } \delta = -1+3i$$

Les solutions de  $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$  sont :

$$z_1 = \frac{(9+3i) - (1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{8+6i}{2(1+2i)} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{4-8i+3i+6}{10} = 2-i$$

$$z_2 = \frac{(9+3i) + (1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{10}{2(1+2i)} = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{1^2+2^2} = 1-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

$$16. \Delta = -(6i + 2)^2 - 4(1 + 3i)(11i - 23) = (6i + 2)^2 - 4(11i - 23 - 33 - 69i) = -36 + 24i + 4 - 4(-56 - 58i) = -32 + 24i + 224 + 232i = 192 + 256i = 64(3 + 4i)$$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de  $3 + 4i$ , ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de  $192 + 256i$ .

$$\text{On pose } \delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$\text{On rajoute l'équation } |\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25} = 5$$

Avec le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$ , en faisant la somme des deux équations, on trouve  $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$ , d'où l'on tire  $b^2 = 1$ . Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm 2$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm 1$ , d'après l'équation  $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$ , on en déduit que  $ab > 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de même signe.

Si  $a = 2$  alors  $b = 1$  et  $\delta = 2 + i$  et si  $a = -2$  alors  $b = -1$  et  $\delta = -2 - i$

$$\text{Donc } (2 + i)^2 = 3 + 4i \text{ entraîne que } \Delta = 64(3 + 4i) = 8^2(2 + i)^2 = (8(2 + i))^2 = (16 + 8i)^2$$

Deuxième méthode

$$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2 \text{ et on retrouve le même résultat.}$$

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de  $A^2 - 3A - 4 = 0$  sont  $A_1 = -1 < 0$  et  $A_2 = 4$ , donc  $a^2 = 4$ ,

Si  $a = -2$  alors  $b = \frac{2}{a} = -1$  et alors  $\delta = -2 - i$ , si  $a = 2$  alors  $b = \frac{2}{a} = 1$  et alors  $\delta = 2 + i$ .

Les solutions de  $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$  sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{6i + 2 - (16 + 8i)}{2(1 + 3i)} = \frac{-14 - 2i}{2(1 + 3i)} = \frac{-7 - i}{1 + 3i} = \frac{(-7 - i)(1 - 3i)}{1^2 + 3^2} = \frac{-7 + 21i - i - 3}{10} = \frac{-10 + 20i}{10} = -1 + 2i \\ z_2 &= \frac{6i + 2 + (16 + 8i)}{2(1 + 3i)} = \frac{18 + 14i}{2(1 + 3i)} = \frac{9 + 7i}{1 + 3i} = \frac{(9 + 7i)(1 - 3i)}{1^2 + 3^2} = \frac{9 - 27i + 7i + 21}{10} = \frac{30 - 20i}{10} = 3 - 2i \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 12 :

**Correction exercice 13 :**

On pose  $X = Z^2$ ,

$$Z^4 + (3 - 6i)Z^2 - 8 - 6i = 0 \Leftrightarrow X^2 + (3 - 6i)X - 8 - 6i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (3 - 6i)^2 - 4(-8 - 6i) = 9 - 36i - 36 + 32 + 24i = 5 - 12i$$

Les racines carrées de  $5 - 12i$  :

$$(a + ib)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ ab = 6 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \quad L_3$$

En additionnant  $L_1$  et  $L_3$ , on trouve  $2a^2 = 18$  donc  $a^2 = 9$ , c'est-à-dire  $a = \pm 3$ .

En soustrayant  $L_1$  à  $L_3$ , on trouve  $2b^2 = 8$  donc  $b^2 = 4$ , c'est-à-dire  $b = \pm 2$ .

D'après  $L_2$ ,  $a$  et  $b$  ont le même signe donc les deux racines carrées de  $5 - 12i$  sont :  $3 + 2i$  et  $-3 - 2i$ .

Les solutions de  $X^2 + (3 - 6i)X - 8 - 6i = 0$  sont :

$$X_1 = \frac{-(3-6i) - (3+2i)}{2} = -3 + 4i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(3-6i) + (3+2i)}{2} = 2i$$

Or  $X_1 = -3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2+i)^2$  donc  $Z^2 = -3 + 4i$  a deux solutions :

$$Z_1 = 2 + i$$

Et

$$Z_2 = -2 - i$$

De plus  $X_2 = 2i = (1+i)^2$  donc  $Z^2 = 2i$  a deux solutions :

$$Z_3 = 1 + i$$

Et

$$Z_4 = -1 - i$$

Allez à : **Exercice 13 :**

#### Correction exercice 14 :

1. On pose  $X = a \in \mathbb{R}$

$$(1-i)a^3 - (5+i)a^2 + (4+6i)a - 4i = 0 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 4a + i(-a^3 - a^2 + 6a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \\ -a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0 \end{cases}$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5a^2 + 4) = 0$$

Donc cette équation admet 0, 1 et 4 comme racine. Seul 1 est solution de  $-a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0$  donc il existe une unique solution réelle  $a = 1$ .

2. On factorise  $(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i$  par  $X-1$ . Il existe alors  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  telle que :

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = (X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$$

$$\text{Or } (X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha X^3 + (\beta - \alpha)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma$$

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} \alpha = 1-i \\ \beta - \alpha = -(5+i) \\ \gamma - \beta = 4+6i \\ -\gamma = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1-i \\ \beta = -(5+i) + 1-i = -4-2i \\ \gamma = 4+6i - 4 - 2i = 4i \\ \gamma = 4i \end{cases}$$

D'où

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = 0 \Leftrightarrow (X-1)((1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ (1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est :

$$\Delta = (4+2i)^2 - 4(1-i) \times 4i = 16 + 16i - 4 - 16i - 16 = -4 = (2i)^2$$

Les deux racines sont alors

$$X_1 = \frac{4+2i-2i}{2(1-i)} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1^2+1^2} = 1+i$$

$$X_2 = \frac{4+2i+2i}{2(1-i)} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)^2}{1^2+1^2} = 2i$$

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S} = \{1, 1+i, 2i\}$ .

Allez à : **Exercice 14 :**

#### Correction exercice 15 :

$$\Delta = (-i)^2 + 4(1+i) = 4 + 4i - 1 = (2+i)^2$$

Les solutions de  $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$  sont

$$Z_1 = \frac{i+2+i}{2} = 1+i$$

$$Z_2 = \frac{i - (2 + i)}{2} = -1$$

Les solutions de  $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$  vérifient

$$\begin{aligned} z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \left\{ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}} \right\} \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} z^3 = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \arg(z^3) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\arg(z) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Finalement il y a six solutions

$$\left\{ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}; e^{i\frac{\pi}{3}}; -1; e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$$

Allez à : **Exercice 15 :**

#### Correction exercice 16 :

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$  une solution de (E)

$$\begin{aligned} a^4 - 3a^3 + (2 - i)a^2 - 3 + i = 0 &\Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$a_1 = -1$  est solution de  $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3 = 0$  et  $a_2 = 1$  est solution de  $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$ , donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre  $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$  en facteur.

2. Il existe  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On développe

$$(X^2 - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (c - a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de  $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont  $\delta = \pm(1 + 2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2} = 1 - i$$

$$X_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1, 1, 1 - i, 2 + i\}$$

Allez à : Exercice 16 :

**Correction exercice 17 :**

$$1. X^3 = 2\sqrt{2} \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

Donc

$$\begin{aligned} X^3 = 2\sqrt{2} \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3 \arg(X) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k \\ &= \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \\ X_0 &= \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i \\ X_1 &= \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2} e^{\frac{11i\pi}{12}} \\ X_2 &= \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2} e^{\frac{19i\pi}{12}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} X^3 = -8i = 2^3 e^{\frac{3i\pi}{2}} &\Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^3 \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^3 \\ 3 \arg(X) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = 2 e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3})}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \\ X_0 &= 2 e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i \\ X_1 &= 2 e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})} = 2 e^{\frac{7i\pi}{6}} = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i \\ X_2 &= 2 e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3})} = 2 e^{\frac{11i\pi}{6}} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

3. On pose  $X = Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1 + 3i)Z^3 + 8 + 8i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + (1 + 3i)X + 8 + 8i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1 + 3i)^2 - 4 \times \frac{1}{2} (8 + 8i) = 1 + 6i - 9 - 16 - 16i = -24 - 10i$$

Les racines carrées de  $-24 - 10i$  :

$$(a + ib)^2 = -24 - 10i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -24 - 10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ ab = -5 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \quad L_3$$

En additionnant  $L_1$  et  $L_3$ , on trouve  $2a^2 = 2$  donc  $a^2 = 1$ , c'est-à-dire  $a = \pm 1$ .

En soustrayant  $L_1$  à  $L_3$ , on trouve  $2b^2 = 50$  donc  $b^2 = 25$ , c'est-à-dire  $b = \pm 5$ .

D'après  $L_2$ ,  $a$  et  $b$  sont de signes différents donc les deux racines carrées de  $-24 - 10i$  sont :  $1 - 5i$  et  $-1 + 5i$ .

L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1 = \frac{-(1+3i) - (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2 - 2i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(1+3i) + (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2i$$

Les six racines de

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

Sont les six complexes trouvés en 1°) et 2°).

Allez à : **Exercice 17 :**

### Correction exercice 18 :

1. Posons  $z = a \in \mathbb{R}$ ,  $(E) \Leftrightarrow a^3 + 1 - i(a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 1 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$
2. On peut diviser  $z^3 - iz + 1 - i = 0$  par  $z + 1$

|                                                       |                   |
|-------------------------------------------------------|-------------------|
| $z^3 - iz + 1 - i$                                    | $z + 1$           |
| $z^3 + z^2$                                           | $z^2 - z + 1 - i$ |
| <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> |                   |
| $-z^2 - iz + 1 - i$                                   |                   |
| $-z^2 - z$                                            |                   |
| <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> |                   |
| $(1-i)z + 1 - i$                                      |                   |
| $(1-i)z + 1 - i$                                      |                   |
| <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> |                   |
| $0$                                                   |                   |

$z^2 - z + 1 - i$  a pour discriminant  $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$

Les racines de ce polynôme sont :

$$z_1 = \frac{1-(1+2i)}{2} = -i \text{ et } z_2 = \frac{1+(1+2i)}{2} = 1+i$$

Les solutions de  $(E)$  sont  $-1$ ,  $1+i$  et  $-i$ .

Allez à : **Exercice 18 :**

### Correction exercice 19 :

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  une racine de  $(E)$

$$\begin{aligned} x^4 - (3 + \sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)x^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)x - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow x^4 - (3 + \sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x + i(-x^2 + 3x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - (3 + \sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x = 0 & (*) \\ -x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines de  $-x^2 + 3x - 2 = 0$  sont après un petit calcul  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 2$

$$1^4 - (3 + \sqrt{3})1^3 + (2 + 3\sqrt{3})1^2 - 2\sqrt{3} \times 1 = 1 - 3 - \sqrt{3} + 2 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Donc 1 est racine de  $(*)$

$$2^4 - (3 + \sqrt{3})2^3 + (2 + 3\sqrt{3})2^2 - 2\sqrt{3} \times 2 = 16 - 3 \times 8 - 8\sqrt{3} + 8 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$$

Donc 2 est racine de  $(*)$

2. On peut diviser le polynôme par  $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$

|                                                                                |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $X^4 - (3 + \sqrt{3})X^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)X - 2i$   | $X^2 - 3X + 2$        |
| $X^4 \quad - 3X^3 \quad \quad \quad + 2X^2$                                    | $X^2 - \sqrt{3}X - i$ |
| <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>                          |                       |
| $-\sqrt{3}X^3 \quad \quad + (3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)X - 2i$      |                       |
| $-\sqrt{3}X^3 \quad \quad \quad + 3\sqrt{3}X^2 \quad \quad \quad - 2\sqrt{3}X$ |                       |
| <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>                          |                       |
| $\quad \quad \quad -iX^2 \quad \quad \quad + 3iX - 2i$                         |                       |



$$\frac{-iX^2 + 3iX - 2i}{0}$$

Il reste à déterminer les racines de  $X^2 - \sqrt{3}X - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2}$$

$$S = \left\{ 1, 2, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2} \right\}$$

Allez à : **Exercice 19 :**

**Correction exercice 20 :**

1.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) + 2i\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{2^2 - 3} = 2\sqrt{3} + 2i \\ |z^2| &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Si on pose  $\theta = \arg(z^2)$ ,  $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  donc  $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Autre méthode :

$$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

2.

On déduit de la première question que  $|z^2| = 4$  donc  $|z|^2 = 4$  et que  $|z| = 2$ . Et que les arguments possible de  $z$  sont  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , donc  $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$  ou  $z = -2e^{i\frac{\pi}{12}}$ . Mais  $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  entraîne que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc  $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

3. D'après la question précédente

$$\begin{aligned} 2e^{i\frac{\pi}{12}} &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 20 :**

**Correction exercice 21 :**

1.

$$\begin{aligned} u^4 = -4 &\Leftrightarrow \begin{cases} |u^4| = |-4| \\ \arg(u^4) = \arg(-4) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^4 = 4 \\ 4\arg(u) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a quatre solutions

$$\begin{aligned}u_0 &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i \\u_1 &= \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i \\u_2 &= \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i = \overline{u_1} \\u_3 &= \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i = \overline{u_0}\end{aligned}$$

2.

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^4 = -4(z-1)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -4$$

On pose  $u = \frac{z+1}{z-1}$ , il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant  $z$  en fonction de  $u$ .

$$\begin{aligned}u &= \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow u(z-1) = z+1 \Leftrightarrow zu - u = z+1 \Leftrightarrow zu - z = u+1 \Leftrightarrow z(u-1) = u+1 \Leftrightarrow z \\&= \frac{u+1}{u-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{u_0+1}{u_0-1} = \frac{1+i+1}{1+i-1} = \frac{2+i}{i} = 1-2i \\z_1 &= \frac{u_1+1}{u_1-1} = \frac{-1+i+1}{-1+i-1} = \frac{i}{-2+i} = \frac{i(-2-i)}{(-2)^2+1^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\z_2 &= \frac{u_2+1}{u_2-1} = \frac{\overline{u_1}+1}{\overline{u_1}-1} = \overline{z_1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\z_3 &= \frac{u_3+1}{u_3-1} = \frac{\overline{u_0}+1}{\overline{u_0}-1} = \overline{z_0} = 1+2i\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 21 :**

**Correction exercice 22 :**

1. Les racines quatrième de l'unité sont  $\{1, i, -1, -i\}$ .

2.  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$  donc

$$\begin{aligned}X^4 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4\arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0,1,2,3\}\end{aligned}$$

Il y a quatre solutions :

$$\begin{aligned}X_0 &= e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\X_1 &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\X_2 &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\X_3 &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2$ . Donc  $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0$ . Or

$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2 j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$X = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \text{ et } X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

3. On pose  $Y = X^4$ , l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 3e^{\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc les solutions de  $\delta^2 = \Delta$  sont

$$\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Y^2 + jY + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2 + \frac{Y}{j} + 1 = 0$$

Les solutions de  $T^2 + T + 1 = 0$  sont  $T_1 = j$  et  $T_2 = j^2$

Donc  $\frac{Y_1}{j} = j \Leftrightarrow Y_1 = j^2$  et  $\frac{Y_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Y_2 = j^3 = 1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : **Exercice 22 :**

**Correction exercice 23 :**

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+i}\right)^2 = \frac{(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))^2}{(1+i)^2} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3})^2 + 2i(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1-1+2i} \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}+3 - (1+2\sqrt{3}+3) + 2i(1-3)}{2i} = \frac{-4\sqrt{3}-4i}{2i} = -\frac{4(\sqrt{3}+i)}{2i} \\ &= 2i(\sqrt{3}+i) = -2+2i\sqrt{3} \\ \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 &= -2+2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} \left( \frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i} \right)^2 &= \left( 1-\sqrt{3} \frac{1-i}{1+i} \right)^2 = \left( 1-\sqrt{3} \frac{(1-i)^2}{1^2+1^2} \right)^2 = \left( 1-\sqrt{3} \frac{1-2i-1}{2} \right)^2 \\ &= (1+i\sqrt{3})^2 = \left( 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 = (-2j^2)^2 = 4j^4 = 4j = 4 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -2 + 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2+(-1)^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc le module de  $\frac{1+i}{1-i}$  est 1 et un argument est  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} 2010 &= 4 \times 502 + 2 \\ \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{2010} &= \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{4 \times 502 + 2} = \left( e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{4 \times 502 + 2} = \left( \left( e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^4 \right)^{502} \times \left( e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2 = (e^{2i\pi})^{502} \times e^{i\pi} \\ &= 1^{502} \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})^{2010} &= \left( 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^{2010} = (2(-j^2))^{2010} = 2^{2010} \times j^{4020} = 2^{2010} j^{3 \times 1340} \\ &= 2^{2010} (j^3)^{1340} = 2^{2010} \times 1^{1340} = 2^{2010} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \sqrt{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{12}} \\ z_1^n &= \left( 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$z_2 = 1+j = -j^2$$

$$z_2^n = (-j^2)^n = (-1)^n j^{2n}$$

$$\text{Si } n \equiv 0 [6], n = 6k, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k} = j^{12k} = (-1)^0 (j^3)^{4k} = 1^{4k} = 1$$

$$\text{Si } n \equiv 1 [6], n = 6k+1, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+1} = (-1)^1 j^{12k+2} = (-1)(j^3)^{4k} j^2 = -1^{4k} j^2 = -j^2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si } n \equiv 2 [6], n = 6k+2, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+2} = (-1)^2 j^{12k+4} = (-1)^2 (j^3)^{4k} j^2 = 1^{4k} j^4 = j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si } n \equiv 3 [6], n = 6k+3, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+3} = (-1)^3 j^{12k+6} = (-1)^3 (j^3)^{4k} j^6 = -1^{4k} j^6 = -1$$

$$\text{Si } n \equiv 4 [6], n = 6k+4, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+4} = (-1)^4 j^{12k+8} = (j^3)^{4k} j^8 = 1^{4k} j^2 = j^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si } n \equiv 5 [6], n = 6k+5, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+5} = (-1)^5 j^{12k+10} = -(j^3)^{4k} j^{10} = -1^{4k} j = -j = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} = \frac{1+i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} \\ z_3^n &= e^{2in\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_4 &= 1 + \cos(\phi) + i \sin(\phi) = 2 \cos^2(\phi) + 2i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \left( \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right) \\
&= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \\
z_4^n &= \left( \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)^n e^{\frac{ni\phi}{2}}
\end{aligned}$$

Remarque :

$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$  n'est pas forcément le module de  $z_4$  car  $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$  n'est positif que pour certaine valeur de  $\phi$ .

Allez à : **Exercice 24 :**

**Correction exercice 25 :**

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3} + i)^n &= \left( 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \right)^n = 2^n \left( e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^n = 2^n e^{\frac{ni\pi}{6}} \\
(\sqrt{3} + i)^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (\sqrt{3} + i)^n - \overline{(\sqrt{3} + i)^n} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}} - e^{-\frac{ni\pi}{6}} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} \\
&= k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n}{6} = k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 6k \\
(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow (\sqrt{3} + i)^n + \overline{(\sqrt{3} + i)^n} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}} + e^{-\frac{ni\pi}{6}} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n}{6} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 3 + 6k
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 25 :**

**Correction exercice 26 :**

$$\begin{aligned}
z &= \rho e^{i\theta} \\
z^k + \bar{z}^k &= \rho^k e^{ki\theta} + \rho^k e^{-ki\theta} = \rho^k (e^{ki\theta} + e^{-ki\theta}) = 2\rho^k \cos(k\theta) \\
(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n) &= 2\rho \cos(\theta) 2\rho^2 \cos(2\theta) \dots 2\rho^n \cos(n\theta) \\
&= 2^n \rho^{1+2+\dots+n} \cos(\theta) \cos(2\theta) \dots \cos(n\theta) = 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos(\theta) \cos(2\theta) \dots \cos(n\theta)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 26 :**

**Correction exercice 27 :**

1.

$$\begin{aligned}
|1 + iz| &= |1 - iz| \Leftrightarrow |1 + iz|^2 = |1 - iz|^2 \Leftrightarrow (1 + iz)(\overline{1 + iz}) = (1 - iz)(\overline{1 - iz}) \\
&\Leftrightarrow (1 + iz)(1 - i\bar{z}) = (1 - iz)(1 + i\bar{z}) \Leftrightarrow 1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \\
&\Leftrightarrow -i\bar{z} + iz = i\bar{z} - iz \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2.

$$\left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia} \Rightarrow \left| \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n \right| = \left| \frac{1 + ia}{1 - ia} \right| \Rightarrow \left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right|^n = 1 \Rightarrow |1 + iz| = |1 - iz| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

On pose  $z = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$  (ce qui est toujours possible puisque pour  $z \in \mathbb{R}$  il existe un unique

$\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $z = \tan(\theta)$ ) ainsi

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1 + i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1 - i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

Et  $a = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  ainsi

$$\frac{1+ia}{1-ia} = e^{2i\alpha}$$

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \Leftrightarrow e^{2in\theta} = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow 2n\theta = 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Donc les solutions sont

$$z_k = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Avec  $a = \tan(\alpha)$

3.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On peut aussi exprimer ce quotient sous forme algébrique et constater qu'il vaut  $e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

On cherche les complexes tels que

$$z^3 = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Il y a trois racines cubique de  $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ ,  $z_k = e^{i\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{9}}; z_1 = e^{i\frac{7\pi}{9}}; z_2 = e^{i\frac{13\pi}{9}}$$

Allez à : **Exercice 27 :**

**Correction exercice 28 :**

On pose  $Z = \frac{2z+1}{z-1}$ , les solutions de  $Z^4 = 1$  sont  $1, i, -1$  et  $-i$  (ce sont les racines quatrième de l'unité)

$$Z = \frac{2z+1}{z-1} \Leftrightarrow (z-1)Z = 2z+1 \Leftrightarrow zZ - Z = 2z+1 \Leftrightarrow zZ - 2z = Z+1 \Leftrightarrow z(Z-2) = Z+1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{Z-2}$$

Il y a 4 solutions

$$z_0 = \frac{1+1}{1-2} = -2$$

$$z_1 = \frac{i+1}{i-2} = \frac{(i+1)(-i-2)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{1-2i-i-2}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$z_2 = \frac{-1+1}{-1-2} = 0$$

$$z_3 = \frac{-i+1}{-i-2} = \frac{(-i+1)(i-2)}{(-2)^2 + (-1)^2} = \frac{1+2i+i-2}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Allez à : **Exercice 28 :**

**Correction exercice 29 :**

Il faut d'abord écrire  $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$  sous forme trigonométrique

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Première méthode

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 \Leftrightarrow z^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |4e^{i\frac{\pi}{3}}| \\ \arg(z^4) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 4 \\ 4\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}; z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}; z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}; z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Deuxième méthode

$$\text{On pose } a = \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 \Leftrightarrow z^4 = a^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{a} \in \{1, i, -1, -i\} \Leftrightarrow z \in \{a, ia, -a, -ia\}$$

$$ia = i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$-a = -\frac{1+\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$-ia = \frac{\sqrt{3}-1}{4} - i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Remarque :

En réunissant ces deux méthodes on pourrait en déduire les valeurs de  $e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$ .

Allez à : **Exercice 29 :**

**Correction exercice 30 :**

1.

$$u^2 = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow u = \pm 2e^{i\frac{\pi}{3}} = \pm 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm(1+i\sqrt{3})$$

2. On pose  $u = \frac{z+i}{z-i}$

$$u = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow u(z-i) = z+i \Leftrightarrow uz - iu = z+i \Leftrightarrow uz - z = iu + i \Leftrightarrow z(u-1) = i(u+1) \Leftrightarrow z = i\frac{u+1}{u-1}$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = i\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1+i\sqrt{3}-1} = i\frac{2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i$$

$$z_2 = i\frac{-1-i\sqrt{3}+1}{-1-i\sqrt{3}-1} = i\frac{-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}(2-i\sqrt{3})}{2^2+(\sqrt{3})^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{7} + \frac{3}{7}i$$

Allez à : **Correction exercice 30 :**

**Correction exercice 31 :**

On pose  $u = \frac{z-1}{z-i}$  et on cherche les solutions de  $u^3 = -8$

$$u^3 = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} |u^3| = |-8| \\ \arg(u^3) = \arg(-8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^3 = 8 \\ 3\arg(u) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 2 \\ \arg(u) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Il y a 3 solutions

$$u_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}; \quad u_1 = 2e^{i\pi} = -2 \quad \text{et} \quad u_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$u = \frac{z-1}{z-i} \Leftrightarrow u(z-i) = z-1 \Leftrightarrow uz - iu = z-1 \Leftrightarrow uz - z = -1 + iu \Leftrightarrow z(u-1) = -1 + iu \Leftrightarrow z = \frac{-1 + iu}{u-1}$$

$$z_0 = \frac{-1 + iu_0}{u_0 - 1} = \frac{-1 + i(1 + i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3} + i}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$z_1 = \frac{-1 + iu_1}{u_1 - 1} = \frac{-1 - 2i}{-3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$z_2 = \frac{1 + iu_2}{u_2 - 1} = \frac{-1 + i(1 - i\sqrt{3})}{1 - i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 + \sqrt{3} + i}{-i\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Allez à : **Exercice 31 :**

**Correction exercice 32 :**

1.  $X_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ , avec  $k \in \{0,1,2\}$ .

$$X_0 = 1, X_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j, X_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

$$2. \quad \bar{j} = X_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = j^2$$

3.  $j^3 = 1$ , puisque  $j$  est solution de  $X^3 = 1$ , donc  $j \times j^2 = 1 \Rightarrow j = \frac{1}{j^2}$ .

$$4. \quad 1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = \frac{0}{1-j} = 0 \text{ car } j \neq 1 \text{ et } j^3 = 1.$$

$$\text{Autre solution } 1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

C'est moins bien car un résultat du cours est que la somme des racines  $n$ -ième de l'unité est nul, et, ici  $1, j$  et  $j^2$  sont les trois racines troisième de l'unité.

$$5. \quad \frac{1}{1+j} = \frac{1}{-j^2} = -j, \text{ car } 1 + j = -j^2 \text{ et } \frac{1}{j^2} = j.$$

6. La division euclidienne de  $n$  par trois dit qu'il existe un unique couple  $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$  tel que  $n = 3q + r$ , donc  $j^n = j^{3q+r} = (j^3)^q j^r = 1^q j^r = j^r$ , autrement dit si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $j^n = 1$  si  $n \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $j^n = j$  et si  $n \equiv 2 \pmod{3}$  alors  $j^n = j^2$ .

Allez à : **Exercice 32 :**

**Correction exercice 33 :**



$$z^3 = \frac{1}{4}(-1+i) \Leftrightarrow z^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \left| \frac{1}{(\sqrt{2})^3} e^{\frac{3i\pi}{4}} \right| \\ \arg(z^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \\ 3 \arg(z) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Il y a trois solutions  $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}$ ,  $k \in \{0,1,2\}$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}; z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{11i\pi}{12}}; z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

$$(z_k)^4 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})} \right)^4 = \frac{1}{4} e^{i(\pi + \frac{8k\pi}{3})} = \frac{1}{4} e^{i\frac{(8k+3)\pi}{3}}$$

$$(z_0)^4 = \frac{1}{4} e^{i\pi} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}; (z_1)^4 = \frac{1}{4} e^{i\frac{11\pi}{3}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{3}} \notin \mathbb{R}; (z_2)^4 = \frac{1}{4} e^{i\frac{19\pi}{3}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$$

Il n'y a que  $z_0$  dont la puissance quatrième est dans  $\mathbb{R}$ .

Allez à : **Exercice 33 :**

### Correction exercice 34 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont  $\{1, i, -1, -i\}$ .

2.  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$  donc

3.

$$X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left| e^{\frac{4i\pi}{3}} \right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4 \arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2})}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$X_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2})} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2. \text{ Donc } X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0. \text{ Or}$$

$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2 j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$X = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, X = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, X = i \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \text{ et } X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

On pose  $Y = X^4$ , l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc les solutions de  $\delta^2 = \Delta$  sont  $\delta = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\delta = -\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = -\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Y^2 + jY + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2 + \frac{Y}{j} + 1 = 0$$

Les solutions de  $T^2 + T + 1 = 0$  sont  $T_1 = j$  et  $T_2 = j^2$

Donc  $\frac{Y_1}{j} = j \Leftrightarrow Y_1 = j^2$  et  $\frac{Y_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Y_2 = j^3 = 1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : **Exercice 34 :**

### Correction exercice 35 :

Là on a un problème parce qu'il n'est pas simple de mettre  $11 + 2i$  sous forme trigonométrique, essayons tout de même :

$$|11 + 2i| = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5} = (\sqrt{5})^3$$

Si on appelle  $\theta$  un argument de  $11 + 2i$ , on a

$$\cos(\theta) = \frac{11}{5\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

Il ne s'agit pas d'un angle connu. Donc il va falloir être malin, on cherche  $z = a + ib$  tel que

$$\begin{aligned} (a + ib)^3 &= 11 + 2i \Leftrightarrow a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = 11 + 2i \\ &\Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3) = 11 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 11 \\ 3a^2b - b^3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On sait aussi que

$$|(a + ib)^3| = |11 + 2i| \Leftrightarrow |a + ib|^3 = (\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2})^3 = (\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5$$

On remplace  $a^2 = 5 - b^2$  dans  $3a^2b - b^3 = 2$

$$3(5 - b^2)b - b^3 = 2 \Leftrightarrow -4b^3 + 15b = 2 \Leftrightarrow 4b^3 - 15b + 2 = 0$$

Il y a une racine presque évidente  $b = -2$ , si on ne la voit pas on peut aussi remplacer  $b^2 = 5 - a^2$  dans  $a^3 - 3ab^2 = 11$

$$a^3 - 3a(5 - a^2) = 11 \Leftrightarrow 4a^3 - 15a - 11 = 0$$

Là c'est plus clair,  $a_0 = -1$  est solution donc on peut factoriser par  $a + 1$

$$4a^3 - 15a - 11 = (a + 1)(4a^2 - 4a - 11)$$

(C'est facile à factoriser)

Les racines de  $4a^2 - 4a - 11$  sont  $a_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$  et  $a_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$

Pour trouver les valeurs de  $b$  correspondantes on réutilise l'équation

$$3a^2b - b^3 = 2 \Leftrightarrow b(3a^2 - b^2) = 2 \Leftrightarrow b(3a^2 - (5 - a^2)) = 2 \Leftrightarrow b = \frac{2}{4a^2 - 5}$$

$$a = -1 \Rightarrow b = \frac{2}{4(-1)^2 - 5} = -2$$

$$a = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{2}{4\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2 - 5} = \frac{2}{4\left(\frac{1}{4} - \sqrt{3} + 4\right) - 5} = \frac{2}{12 - 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{12}$$

$$a = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{2}{4\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 5} = \frac{2}{4\left(\frac{1}{4} + \sqrt{3} + 4\right) - 5} = \frac{2}{12 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{12}$$

Pour bien faire, il faudrait faire la réciproque (parce que les équivalences ne sont pas claires), admis.

$11 + 2i$  admet trois racines cubiques

$$-1 - 2i; \frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\frac{3 + \sqrt{3}}{12}; \frac{1}{2} + \sqrt{3} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{12}$$

Allez à : **Exercice 35 :**

**Correction exercice 36 :**

$$\frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}} &= \frac{2(1 + i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1 + i)} = \sqrt{2} \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}) + i\frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

On déduit de ces deux égalités que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Puis que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3})} = \frac{(-1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{-1 + 2\sqrt{3} - 3}{1 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

Et enfin que

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

Allez à : **Exercice 36 :**

**Correction exercice 37 :**

On cherche les complexes  $z$  tels que  $z^4 = 81$

$$z^4 = 81 \Leftrightarrow z^4 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 9)(z^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 3^2)(z^2 - (3i)^2) = 0 \\ \Leftrightarrow (z - 3)(z + 3)(z - 3i)(z + 3i) = 0$$

Il y a 4 racines quatrième de 81 : 3, -3, 3i et -3i

La même méthode ne marche pas pour les racines quatrième de -81.

$$z^4 = -81 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |-81| \\ \arg(z^4) = \arg(-81) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 81 = 3^4 \\ 4 \arg(z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 3 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

Il y a 4 racines quatrième de -81 :  $z_k = 3e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1 + i) \\ z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(-1 + i) \\ z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}(1 + i) \\ z_3 = 3e^{i\frac{7\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1 - i)$$

Allez à : **Exercice 37 :**

**Correction exercice 38 :**

1.

a.  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ .

b.

$$z^n = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = \arg(-1) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \arg(z) = \pi + 2k\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n - 1\} \end{cases}$$

Il y a  $n$  solutions  $z_k = e^{\frac{i(\pi + 2k\pi)}{n}}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$

Soit encore  $z_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

2. Première solution  $z^{2n} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = 1 \\ z^n = -1 \end{cases}$

La somme des racines  $2n$ -ième de l'unité (qui est nulle) est la somme des racines  $n$ -ième de l'unité (qui est nulle) plus la somme des complexes qui vérifient  $z^n = -1$ , donc la somme des complexes qui vérifient  $z^n = -1$  est nulle.

Deuxième solution

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\ = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

Car  $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$  pour  $n \geq 2$ .

Allez à : **Exercice 38 :**

**Correction exercice 39 :**

1. On pose  $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$

$$z_2^3 = z_1^3 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2^3| = |z_1^3| \\ \arg(z_2^3) = \arg(z_1^3) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^3 = |z_1|^3 \\ 3 \arg(z_2) = 3 \arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2| = |z_1| \\ \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Donc

$$z_2 = |z_1| e^{i(\arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3})} = |z_1| e^{i \arg(z_1)} e^{\frac{2ik\pi}{3}} = z_1 \left( e^{\frac{2i\pi}{3}} \right)^k = z_1 j^k$$

Les solutions sont  $z_2 = z_1$ ,  $z_2 = jz_1$  et  $z_2 = j^2 z_1$

De même les solutions de  $z_3^3 = z_1^3$  sont  $z_3 = z_1$ ,  $z_3 = jz_1$  et  $z_3 = j^2 z_1$

2.  $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$

On pose  $Z = z^3$

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (7-i)^2 - 4(-8-8i) = 49 - 14i - 1 + 32 + 32i = 80 + 18i = 81 + 2 \times 9i - 1 = (9+i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(7-i) - (9+i)}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

$$Z_2 = \frac{-(7-i) + (9+i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

On cherche alors les  $z$  tels que  $z^3 = -8 = (2i)^3$  et les  $z$  tels que

$$z^3 = 1+i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \left( 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^3$$

D'après la première question

$$z^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow z \in \{-2, -2j, -2j^2\}$$

$$z^3 = \left( 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^3 \Leftrightarrow z \in \left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}, j 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}, j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right\}$$

On peut arranger ces deux dernières solutions

$$j 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i 2^{\frac{1}{6}}$$

$$j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4i\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

Bref l'ensemble des solutions est

$$\left\{ -2, -2j, -2j^2, 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}, -i 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17\pi}{12}} \right\}$$

Allez à : **Exercice 39 :**

**Correction exercice 40 :**

On ne peut pas trouver la forme trigonométrique de  $-7 - 24i$ .

$$-7 - 24i = 9 - 2 \times 12i - 16 = (3 - 4i)^2 = (4 - 4i - 1)^2 = ((2 - i)^2)^2 = (2 - i)^4$$

On cherche les  $z$  qui vérifient  $z^4 = (2 - i)^4$

$$z^4 = (2 - i)^4 \Leftrightarrow z^4 - (2 - i)^4 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 + (2 - i)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 + i^2(2 - i)^2) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 - (2i + 1)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - (2 - i))(z + (2 - i))(z - (2i + 1))(z + (2i + 1)) = 0$$

L'ensemble des solutions est

$$\{2 - i, -2 + i, 1 + 2i, -1 - 2i\}$$

Allez à : **Exercice 40 :**

### Correction exercice 41 :

Il faut mettre  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$  sous sa forme trigonométrique.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &\Leftrightarrow z^6 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^6| = 1 \\ \arg(z^6) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^6 = 1 \\ 6\arg(z) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \end{cases}\end{aligned}$$

Les solutions sont

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned}z^4 = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = 2^{-\frac{1}{2}} \\ \arg(z^4) = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 2^{-\frac{1}{2}} \\ 4\arg(z) = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{8}} \\ \arg(z) = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}\end{aligned}$$

Il y a 4 solutions

$$z_k = 2^{-\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

$$\begin{aligned}z^6 + 27 = 0 &\Leftrightarrow z^6 = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^6| = |-27| \\ \arg(z^6) = \arg(-27) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}\end{aligned}$$

Il y a 6 solutions

$$\begin{aligned}z_k &= \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ z_0 &= \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}} = i\sqrt{3} \\
z_2 &= \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_3 &= \sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_4 &= \sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i\sqrt{3} \\
z_5 &= \sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \Leftrightarrow \frac{(z+1)^6}{(z-1)^6} = -27 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$$

On pose  $Z = \frac{z+1}{z-1}$

$$\begin{aligned}
Z^6 = -27 &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z^6| = |-27| \\ \arg(Z^6) = \arg(-27) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(Z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3} \\ \arg(Z) = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a 6 solutions

$$Z_k = \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Il faut alors trouver  $z$  en fonction de  $Z$ ,

$$\begin{aligned}
Z = \frac{z+1}{z-1} &\Leftrightarrow Z(z-1) = z+1 \Leftrightarrow Zz - Z = z+1 \Leftrightarrow Zz - z = Z+1 \Leftrightarrow z(Z-1) = Z+1 \Leftrightarrow z \\
&= \frac{Z+1}{Z-1}
\end{aligned}$$

Il y a 6 solutions

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1} = \frac{(Z_k + 1)(\overline{Z_k} - 1)}{(Z_k - 1)(\overline{Z_k} - 1)} = \frac{Z_k\overline{Z_k} - Z_k + \overline{Z_k} - 1}{Z_k\overline{Z_k} - Z_k - \overline{Z_k} + 1} = \frac{|Z_k|^2 - (Z_k - \overline{Z_k}) - 1}{|Z_k|^2 - (Z_k + \overline{Z_k}) + 1} \\
&= \frac{|Z_k|^2 - 2i\Im(Z_k) - 1}{|Z_k|^2 - 2\Re(Z_k) + 1} = \frac{3 - 2i\Im(Z_k) - 1}{3 - 2\Re(Z_k) + 1} = \frac{2 - 2i\Im(Z_k)}{4 - 2\Re(Z_k)} = \frac{1 - i\Im(Z_k)}{2 - \Re(Z_k)}
\end{aligned}$$

$$Z_0 = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 2 - i\sqrt{3}$$

$$Z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}} = i\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{7} - i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_3 = \sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_3 = \frac{1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_4 = \sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i\sqrt{3} \Rightarrow z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_5 = \sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_5 = \frac{1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 2 + i\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 41 :

### Correction exercice 42 :

1. Ce sont les racines cinquième de l'unité, il vaut mieux connaître la formule  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ ,  $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Sinon il faut absolument retrouver la formule très rapidement

$$\begin{aligned} z^5 = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |1| \\ \arg(z^5) = \arg(1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 1 \\ 5 \arg(z) = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ ,  $k \in \{0,1,2,3,4\}$ , c'est-à-dire

$$z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}; z_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}; z_3 = e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = \overline{z_3}; z_4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = \overline{z_1}$$

2.

$$\begin{aligned} z^5 = 1 - i &\Leftrightarrow z^5 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow z^5 = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(z^5) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 5 \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \left( 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z_k = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, \quad k \in \{0,1,2,3,4\} \end{aligned}$$

Il y a cinq solutions

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{\pi}{20}}; z_1 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{9\pi}{20}}; z_2 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{17\pi}{20}}; z_3 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{25\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2^{\frac{1}{10}} \times \sqrt{2}(1+i) \\ &= -2^{\frac{1}{10} + \frac{1}{2}}(1+i) = -2^{\frac{3}{5}}(1+i); z_4 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{32\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{8\pi}{5}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z^3 = 2 - 2i &\Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow z^3 = (\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = (\sqrt{2})^3 \\ \arg(z^3) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = (\sqrt{2})^3 \\ 3 \arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a trois solutions  $z_k = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ ,  $k \in \{0,1,2\}$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}; z_1 = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}; z_2 = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

4.

$$\begin{aligned} z^5 = \overline{z} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |\overline{z}| \\ \arg(z^5) = \arg(\overline{z}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = |z| \\ 5 \arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (|z|^4 - 1)|z| = 0 \\ 6 \arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 - 1 = 0 \text{ ou } |z| = 0 \\ \arg(z) = \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \{z = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a 6 solutions :  $z = 0$  et  $z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}$ ,  $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$



$$z = 0; z_0 = 1; z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_3 = e^{i\pi} = -1; z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Allez à : Exercice 42 :

### Correction exercice 43 :

1. On cherche les complexes tels que

$$z^n = -i \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |-i| \\ \arg(z^n) = \arg(-i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

On cherche les complexes tels que

$$z^n = 1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = \sqrt{2} \\ \arg(z^n) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \\ n \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{2n}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k = 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

2.  $z^2 - z + 1 - i = 0$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1 - i) = -3 - 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{1 - (1 + 2i)}{2} = -i$$

$$z_2 = \frac{1 + 1 + 2i}{2} = 1 + i$$

3.  $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ , on pose  $Z = z^n$

$$z^{2n} - z^n + 1 - i = 0 \Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = -i \\ \text{ou} \\ Z = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = -i \\ \text{ou} \\ z^n = 1 + i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k'\pi}{n}\right)}, k' \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Allez à : Exercice 43 :

### Correction exercice 44 :

- 1.

$$(z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n - (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$$

$$= z^n - 1$$

Donc

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

Il s'agit de la formule connue donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

2.

$$e^{ix} - 1 = e^{\frac{ix}{2}} \left( e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right) = e^{\frac{ix}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

3.

$$\begin{aligned} Z_n &= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{(n-1)ix} = 1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \dots + (e^{ix})^n = \frac{(e^{ix})^n - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{inx}{2}} \left( e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} \left( e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)} = e^{\frac{inx}{2} - \frac{ix}{2}} \frac{2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{\frac{(n-1)ix}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= (\cos((n-1)x) + i \sin((n-1)x)) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \cos((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i \sin((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Comme

$$X_n + iY_n = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{(n-1)ix}$$

On a

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos((n-1)x) = \cos((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Et

$$\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin((n-1)x) = \sin((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Allez à : **Exercice 44 :**

### Correction exercice 45 :

1. D'après le cours, il existe  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  tel que  $\alpha = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ .
2. Comme  $\alpha \neq 1$

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha} = \frac{1 - 1}{1 - \alpha} = 0$$

3.  $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$  d'une part et pour tout  $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

On a

$$f'(x) = \frac{-6x^5(1-x) - (1-x^6)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-6x^5 + 6x^6 + 1 - x^6}{(1-x)^2} = \frac{-6x^5 + 5x^6 + 1}{(1-x)^2}$$

On obtient donc l'égalité

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = \frac{-6x^5 + 5x^6 + 1}{(1-x)^2}$$

On prend  $x = \alpha$

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4 = \frac{-6\alpha^5 + 5\alpha^6 + 1}{(1-\alpha)^2} = \frac{-6 + 5\alpha + 1}{(1-\alpha)^2}$$

Car  $\alpha^5 = 1$  et  $\alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = \alpha$ , par conséquent

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4 &= \frac{-5 + 5\alpha}{(1 - \alpha)^2} = -5 \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha)^2} = -\frac{5}{1 - \alpha} = -5 \frac{1 - e^{-\frac{2ik\pi}{5}}}{\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{5}}\right)} \\ &= -5 \frac{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}} - e^{-\frac{2ik\pi}{5}} + 1} = -5 \frac{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)} \\ &= -\frac{5}{2} - i \frac{5 \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)} = -\frac{5}{2} - i \frac{10 \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} i \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 45 :**

### Correction exercice 46 :

Soit  $f$  la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\ f'(x) &= 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

On prend cette fonction en  $\epsilon$ , et on rappelle que  $\epsilon^n = 1$  (et que donc  $\epsilon^{n+1} = \epsilon$ )

$$\begin{aligned} 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1} &= \frac{-(n+1)\epsilon^n + n\epsilon^{n+1} + 1}{(1-\epsilon)^2} = \frac{-(n+1) + n\epsilon + 1}{(1-\epsilon)^2} = \frac{-n + n\epsilon}{(1-\epsilon)^2} \\ &= -n \frac{1 - \epsilon}{(1-\epsilon)^2} = -\frac{n}{1-\epsilon} \end{aligned}$$

Ce résultat est relativement satisfaisant mais on va tout de même l'écrire sous forme algébrique.

Comme  $|\epsilon| = 1$

$$|\epsilon| = 1 \Leftrightarrow |\epsilon|^2 = 1 \Leftrightarrow \epsilon \bar{\epsilon} = 1 \Leftrightarrow \bar{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} = \frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon \epsilon^{n-1}} = \frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon^n} = \epsilon^{n-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\epsilon} &= \frac{1-\bar{\epsilon}}{(1-\epsilon)(1-\bar{\epsilon})} = \frac{1-\epsilon^{n-1}}{1-(\epsilon+\bar{\epsilon})+|\epsilon|^2} = \frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\operatorname{Re}(\epsilon)} \\ 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1} &= -n \times \frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\operatorname{Re}(\epsilon)} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 46 :**

### Correction exercice 47 :

Pour  $z \neq 1$

$$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

On pose  $Z = \frac{z+1}{z-1}$ ,

Par conséquent  $Z$  est une racine  $n$ -ième de l'unité et donc  $Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\frac{z+1}{z-1} = Z \Leftrightarrow z+1 = Z(z-1) \Leftrightarrow z+1 = Zz - Z \Leftrightarrow z(1-Z) = -(1+Z) \Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{Z-1}$$

Ces équivalences sont vraies si  $z \neq 1$  et  $Z \neq 1$ . Il faut faire un cas particulier si  $k = 0$  car alors  $Z = 1$ .

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1, \dots, n-1\}$$

$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left( e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left( e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)} = \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Si  $k = 0$ ,  $\frac{z+1}{z-1} = 1$  n'a pas de solution.

On trouve  $n - 1$  solutions, ce qui n'est pas une contradiction car

$$(z + 1)^n = (z - 1)^n \Leftrightarrow (z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$$

Est une équation polynomiale de degré  $n - 1$  (puisque les  $z^n$  se simplifient), est admet donc au plus  $n - 1$  solutions.

Allez à : **Exercice 47 :**

**Correction exercice 48 :**

$$\begin{aligned} z^n = \bar{z} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |\bar{z}| \\ \arg(z^n) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |z| \\ n \arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^{n-1} = 1 \text{ ou } |z| = 0 \\ n \arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = 1 \\ (n+1) \arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{2k\pi}{n+1}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont  $z = 0$  et les  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Allez à : **Exercice 48 :**

**Correction exercice 49 :**

On rappelle que

$$\begin{aligned} 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 &= 0 \\ \frac{\beta}{1 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{1 + \beta^4} + \frac{\beta^3}{1 + \beta^6} &= \frac{\beta(1 + \beta^4)(1 + \beta^6) + \beta^2(1 + \beta^2)(1 + \beta^6) + \beta^3(1 + \beta^2)(1 + \beta^4)}{(1 + \beta^2)(1 + \beta^4)(1 + \beta^6)} \\ &= \frac{\beta^{11} + \beta^7 + \beta^5 + \beta + \beta^{10} + \beta^8 + \beta^4 + \beta^2 + \beta^9 + \beta^7 + \beta^5 + \beta^3}{\beta^{12} + \beta^{10} + \beta^8 + 2\beta^6 + \beta^4 + \beta^2 + 1} \\ &= \frac{\beta^4 + 1 + \beta^5 + \beta + \beta^3 + \beta + \beta^4 + \beta^2 + \beta^2 + 1 + \beta^5 + \beta^3}{\beta^5 + \beta^3 + \beta + 2\beta^6 + \beta^4 + \beta^2 + 1} \\ &= \frac{2(1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5)}{\beta^6} = -\frac{2\beta^6}{\beta^6} = -2 \end{aligned}$$

Cette solution n'est pas élégante du tout, il doit y avoir plus malin.

Allez à : **Exercice 49 :**

**Correction exercice 50 :**

$$\begin{aligned} A(X) &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8} \\ &= \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{2 \cos(3x) + 3 \times 2 \cos(x)}{8} \\ &= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(x) &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
&= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i} = \frac{2i \sin(3x) - 3 \times 2i \sin(x)}{-8i} \\
&= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) \\
C(X) &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2 \cos(4x) + 4 \times 2 \cos(2x) + 6}{16} \\
&= \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \\
D(X) &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2 \cos(4x) - 4 \times 2 \cos(2x) + 6}{16} \\
&= \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \\
E(x) &= \cos^2(x) \sin^2(x) = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\
&= \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{4} \times \frac{e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{-4} = \frac{(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})}{-16} \\
&= \frac{e^{2ix}e^{2ix} - 2e^{2ix} + e^{2ix}e^{-2ix} + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + e^{-2ix}e^{2ix} - 2e^{-2ix} + e^{-2ix}e^{-2ix}}{-16} \\
&= \frac{e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix}}{-16} = \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 2}{-16} \\
&= \frac{2 \cos(4x) - 2}{-16} = -\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Autre méthode en utilisant les formules trigonométriques

$$\begin{aligned}
E(x) &= \cos^2(x) \sin^2(x) = (\cos(x) \sin(x))^2 = \left( \frac{1}{2} \sin(2x) \right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos(4x)}{2} \\
&= -\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

En utilisant les formules

$$\begin{aligned}
\sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a), a = x \\
\cos(2a) &= 1 - \sin^2(a) \Leftrightarrow \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, a = 2x \\
F(x) &= \cos(x) \sin^3(x) = \cos(x) B(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
&= \frac{e^{4ix} - 3e^{2ix} + 3 - e^{-2ix} + e^{2ix} - 3 + 3e^{-2ix} - e^{-4ix}}{-16i} \\
&= \frac{e^{4ix} - e^{-4ix} - 2(e^{2ix} - e^{-2ix})}{-16i} = \frac{2i \sin(4x) - 2 \times 2i \sin(2x)}{-16i} \\
&= -\frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \cos^3(x) \sin(x) = A(x) \sin(x) = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{4ix} - e^{2ix} + 3e^{2ix} - 3 + 3 - 3e^{-2ix} + e^{-2ix} - e^{-4ix}}{16i} \\
&= \frac{e^{4ix} - e^{-4ix} + 2(e^{2ix} - e^{-2ix})}{16i} = \frac{2i \sin(4x) + 2 \times 2i \sin(2x)}{16i} \\
&= \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x)
\end{aligned}$$

On peut toujours faire « comme d'habitude » améliorons un peu les choses

$$\begin{aligned}
H(x) &= \cos^3(x) \sin^2(x) = \cos(x) (\cos(x) \sin(x))^2 = \cos(x) \left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)^2 = \frac{1}{4} \cos(x) \sin^2(2x) \\
&= \frac{1}{4} \cos(x) \left(\frac{1 - \cos(4x)}{2}\right) = \frac{1}{8} \cos(x) (1 - \cos(4x)) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x)
\end{aligned}$$

Alors on utilise des formules souvent inconnues des étudiants (et c'est fort dommage) ou on fait comme d'habitude

$$\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-3ix} + e^{3ix} + e^{-5ix}) \\
&= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{-3ix} + e^{3ix}) \\
&= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (2 \cos(5x) + 2 \cos(3x)) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{1}{16} \cos(3x) \\
I(x) &= \cos^2(x) \sin^3(x)
\end{aligned}$$

Allez, encore une autre technique !

On pose  $t = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = t - \frac{\pi}{2}$  ainsi  $\cos(x) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(t)$  et  $\sin(x) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$

Donc

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sin^2(t) \cos^3(t) = \frac{1}{8} \cos(t) - \frac{1}{16} \cos(5t) - \frac{1}{16} \cos(3t) \\
&= \frac{1}{8} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \cos\left(5x - \frac{5\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \sin(5x) + \frac{1}{16} \sin(3x) \\
J(x) &= \cos(x) \sin^4(x) = \cos(x) D(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16} \\
&= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 4e^{ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix}) \\
&= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix})) \\
&= \frac{1}{32} (2 \cos(5x) - 3 \times 2 \cos(3x) + 2 \times 2 \cos(x)) \\
&= \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{3}{16} \cos(3x) + \frac{1}{8} \cos(x)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 50 :**

**Correction exercice 51 :**

$$1. \quad \frac{1-z}{1-iz} \text{ est réel si et seulement si } \frac{1-z}{1-iz} = \overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)} = \frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}}$$

$$\frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow (1-z)(1+i\bar{z}) = (1-\bar{z})(1-iz) \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z-iz\bar{z} = 1-iz-\bar{z}+iz\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow i\bar{z}-z-iz\bar{z} = -iz-\bar{z}+iz\bar{z} \Leftrightarrow i(z+\bar{z})-2i|z|^2 = z-\bar{z}$$

On pose  $z = a + ib$

$$\frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow 2ia - 2i(a^2 + b^2) = 2ib \Leftrightarrow a - (a^2 + b^2) = b \Leftrightarrow a^2 - a + b^2 + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Il s'agit du cercle de centre  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

2.  $\frac{1-z}{1-iz}$  est imaginaire pur si et seulement si  $\frac{1-z}{1-iz} = -\overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)} = -\frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}}$

$$\frac{1-z}{1-iz} = -\frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow (1-z)(1+i\bar{z}) = -(1-\bar{z})(1-iz) \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z-iz\bar{z}$$

$$= -(1-iz-\bar{z}+iz\bar{z}) \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z-iz\bar{z} = -1+iz+\bar{z}-iz\bar{z} \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z$$

$$= -1+iz+\bar{z} \Leftrightarrow 2-i(z-\bar{z}) = z+\bar{z}$$

On pose  $z = a + ib$

$$\frac{1-z}{1-iz} = -\frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow 2-i(a+ib-a+ib) = 2a \Leftrightarrow 2+2b = 2a \Leftrightarrow 1 = a-b$$

Il s'agit de la droite d'équation :  $b = -1 + a$ .

Allez à : **Exercice 51 :**

#### Correction exercice 52 :

- $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i \Rightarrow (1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 = (2i)^3 = 8 \times i^3 = -8i$
- $z^2 = -8i \Leftrightarrow z^2 = (1+i)^6 \Leftrightarrow z^2 = ((1+i)^3)^2 \Leftrightarrow z = (1+i)^3$  ou  $z = -(1+i)^3$   
 $\Leftrightarrow z = (1+i)^2(1+i)$  ou  $z = -(1+i)^2(1+i) \Leftrightarrow z = 2i(1+i)$  ou  $z = -2i(1+i)$   
 $\Leftrightarrow z = -2+2i$  ou  $z = 2-2i$
- 

$$z = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$z = 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

4.

$$z^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = ((1+i)^2)^3 \Leftrightarrow z^3 = (2i)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{2i}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{2i} = 1 \text{ ou } \frac{z}{2i} = j \text{ ou } \frac{z}{2i} = j^2$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = 2ij \text{ ou } z = 2ij^2 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = 2i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } z = 2i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -\sqrt{3} - i \text{ ou } z = \sqrt{3} - i$$

Allez à : **Exercice 52 :**

#### Correction exercice 53 :

1.

$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z(1-z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.

$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \leq \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4}$$

$$\leq \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Allez à : **Correction exercice 53 :**

#### Correction exercice 54 :

1. Pour tout  $z_1, z_2$  différent de  $-i$ ,

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Leftrightarrow \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \Leftrightarrow (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_2 - i)(z_1 + i) \\ &\Leftrightarrow z_1 z_2 + i z_1 - i z_2 + 1 = z_2 z_1 + i z_2 - i z_1 + 1 \Leftrightarrow 2i z_1 = 2i z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

Donc  $f$  est injective.

- 2.

$$1 - f(z) = 1 - \frac{z - i}{z + i} = \frac{z + i - (z - i)}{z + i} = \frac{2i}{z + i} \neq 0$$

Donc

$$f(z) \neq 1$$

- 3.

Si  $z \in E$  alors  $f(z) \neq 1$  ce qui signifie que  $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , ce qui montre que

$$f(E) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Si  $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  alors il faut montrer qu'il existe  $z \in E$  tel que  $Z = f(z)$ .

$$\begin{aligned} Z = f(z) &\Leftrightarrow Z = \frac{z - i}{z + i} \Leftrightarrow Z(z + i) = z - i \Leftrightarrow Zz + iZ = z - i \Leftrightarrow Zz - z = -iZ - i \Leftrightarrow z(Z - 1) \\ &= -i(Z + 1) \Leftrightarrow z = -i \frac{Z + 1}{Z - 1} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $z \neq -i$ , si

$$z = -i \frac{Z + 1}{Z - 1} = -i \Leftrightarrow \frac{Z + 1}{Z - 1} = 1 \Leftrightarrow Z + 1 = Z - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$$

Donc  $z$  ne peut être égal à  $-i$ . On a montré que si  $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  alors  $Z \in f(E)$  cela montre que

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \subset f(E)$$

On a bien montré l'égalité demandée.

On en déduit que  $f$  est surjective et donc bijective.

- 4.

$$\begin{aligned} 1 - |f(z)|^2 &= 1 - \left| \frac{z - i}{z + i} \right|^2 = 1 - \frac{(z - i)(\bar{z} + i)}{(z + i)(\bar{z} - i)} = \frac{(z + i)(\bar{z} - i) - (z - i)(\bar{z} + i)}{(z + i)(\bar{z} - i)} \\ &= \frac{|z|^2 - iz + i\bar{z} + 1 - (|z|^2 + iz - i\bar{z} + 1)}{|z + i|^2} = \frac{-2iz + 2i\bar{z}}{|z + i|^2} = -\frac{2i(z - \bar{z})}{|z + i|^2} \\ &= -\frac{2i \times 2i \operatorname{Im}(z)}{|z + i|^2} = 4 \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z + i|^2} \end{aligned}$$

5. Si  $z \in \mathbb{R}$  alors  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , d'après la question précédente

$$1 - |f(z)|^2 = 0 \Leftrightarrow |f(z)| = 1$$

Ce qui signifie que  $f(z) \in \mathcal{U}$

Comme  $f(z) \neq 1$ ,  $f(z) \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$

On a montré que

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U} \setminus \{1\}$$

Si  $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$  l'image réciproque de  $Z$  est  $z = -i \frac{Z+1}{Z-1}$ , il faut montrer que ce complexe est réel.

$$\begin{aligned} -i \frac{Z+1}{Z-1} - \overline{\left( -i \frac{Z+1}{Z-1} \right)} &= -i \frac{Z+1}{Z-1} - i \frac{\bar{Z}+1}{\bar{Z}-1} = -i \frac{(Z+1)(\bar{Z}-1) + (\bar{Z}+1)(Z-1)}{(Z-1)(\bar{Z}-1)} \\ &= -i \frac{|Z|^2 - Z + \bar{Z} - 1 + |Z|^2 - \bar{Z} + Z - 1}{|Z-1|^2} = -2i \frac{|Z|^2 - 1}{|Z-1|^2} = 0 \end{aligned}$$

Cela montre que  $-i \frac{Z+1}{Z-1} \in \mathbb{R}$ . On a montré que si  $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$  alors il existe  $z \in \mathbb{R}$  tel que  $Z = f(z)$ .

Autrement dit

$$\mathcal{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$$

D'où l'égalité demandée.



Allez à : Exercice 54 :

## Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1.

Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P = -X^8 + 2X^4 - 1$

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

Soit  $P = 1 - X^8$

Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$  et enfin dans  $\mathbb{Q}[X]$

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

Soit  $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$ . On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que  $1 + j = -j^2$
2. Montrer que  $j$  est une racine multiple de  $P$ .
3. Trouver deux racines réelles évidentes de  $P$ .
4. Factoriser  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

En déduire sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

Soit  $P = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

1. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

En déduire sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  défini par

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

1. Déterminer les racines de  $P$ .
2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme

$$P = -X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

1. Soit  $P = -X^3 + X^2 - X + 1$  un polynôme.  
Factoriser ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Soit

$$P = 1 - X + X^2 - \dots + (-1)^n X^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^k$$

Déterminer les racines réelles et complexes de  $P$ .

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

Factoriser sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  le polynôme

$$P(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$$

Indication :  $P(X) = 1 + X^2 + X^4 + X^6$

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

$$\text{Soit } P = X^4 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}$$

1. Montrer que  $\frac{1}{2}$  est une racine multiple de  $P$ .
2. En déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

$$\text{Soit } P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$$

$$\text{On pose } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

1. Montrer que  $j$  est une racine multiple de  $P$ .
2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
3. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  défini par

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

1. Montrer que  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est une racine multiple de  $P$ .
2. En remarquant que  $P$  est un polynôme pair, donner toutes les racines de  $P$  ainsi que leur multiplicité.
3. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

$$\text{Soit } P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$$

1. Montrer que  $j$  est une racine double de  $P$
2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

1. Déterminer les racines réelles et complexes de  $(X + 1)^6 - X^6$
2. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  défini par

$$P = (X + 1)^7 - X^7 - a$$

Déterminer  $a$  pour que  $P$  admette une racine réelle multiple.

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

1. Le polynôme  $A = X^4 + 3X + 1$ , est-il irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  ?
2. Le polynôme  $B = X^3 + 3X + 1$ , est-il irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  ?

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$  soit factorisable par  $Q = (X^2 - 1)(X - 3)$

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que le polynôme  $A_n = (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $B = X^2 - X + 1$

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Soit

$$P_n = (X + 1)^n - X^n - 1$$

On pose  $n \equiv a \pmod{6}$  avec  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Pour quelles valeurs de  $n, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est-il racine de  $P_n$  ?

On pourra discuter selon les valeurs de  $a$ .

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^n$  par  $X^2 + 1$ .

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Quel est le reste de la division euclidienne de  $P = X^n + X + 1$  par  $Q = (X - 1)^2$  ?

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22.

Quelle est le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X - 1)^2$

Allez à : [Correction exercice 22](#)

Exercice 23.

Soit  $R \in \mathbb{R}[X]$  le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^n$  par  $(X - 1)^2$ .

Déterminer  $R$ .

Allez à : [Correction exercice 23](#)

Exercice 24.

Quel est le reste de la division euclidienne de  $A_n = X^n + X + b$  par  $B = (X - a)^2$ , pour  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Allez à : [Correction exercice 24](#)

Exercice 25.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $A = X^{2n} + 2X^n + 1$  par  $B = X^2 + 1$

Allez à : [Correction exercice 25](#)

Exercice 26.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^{4n} - 1$  est divisible par  $X^4 - 1$ .
2. En déduire que le polynôme  $P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$  avec  $a, b, c$  et  $d$  entiers naturels est divisible par  $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ .

Allez à : [Correction exercice 26](#)

Exercice 27.

On pose  $P(X) = X^3 - 63X + 162$

Sachant que l'une des racines de ce polynôme est le double d'une autre racine, trouver les trois racines de  $P$ .

Indication : On pourra utiliser les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.

Allez à : [Correction exercice 27](#)

Exercice 28.

Soit  $P = X^3 + pX + q$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , on note  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ses racines.

1. Calculer  $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ .
2. Calculer  $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ .
3. Calculer  $C = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$ .
4. On pose  $D = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3$

Calculer  $D$  en fonction de  $p$ .

Allez à : [Correction exercice 28](#)

Exercice 29.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$   $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$

On rappelle les relations entre les racines ( $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ ) et les coefficients d'un polynôme unitaire de degré

4 :  $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$

$$(*) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -c \\ \alpha\beta\gamma\delta = d \end{cases}$$

1. Résoudre

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

2. Soit  $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$

Ecrire le système (\*) pour ce polynôme et on appellera  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  ses racines

3. Sachant que  $\alpha\beta = 6$  trouver toutes les racines de  $P$
4. En déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 29](#)

Exercice 30.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme tel que  $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de  $P$ .
2. Soit  $a$  une racine de  $P$ . Si  $a \neq 0$ , montrer que  $a - 1$  est racine. Si  $a \neq 1$ , montrer que  $a + 1$  est racine.
3. On suppose que  $P$  n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de  $P$ .

Indication :

S'il existe une racine  $a$  telle que  $\operatorname{Re}(a) < 1$  différente de 0 ( $a \neq 0$ ), montrer qu'il y a une infinité de racines.

S'il existe une racine  $a$  telle que  $\operatorname{Re}(a) > 0$  différente de 1 ( $a \neq 1$ ), montrer qu'il y a une infinité de racines.

4. En déduire que  $P$  est de la forme  $\alpha X^k (X - 1)^l$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}[X]$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $l \in \mathbb{N}^*$ .

5. Quel est l'ensemble des polynômes de  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$ .

Allez à : [Correction exercice 30](#)

Exercice 31.

Effectuer la division suivante les puissances croissantes de  $X^4 + X^3 - 2X + 1$  par  $X^2 + X + 1$  à l'ordre 2.

Allez à : [Correction exercice 31](#)

Exercice 32. (Hors programme)

On considère le couple de polynôme à coefficients réels

$$P = X^3 - X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - 1$$

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le  $\operatorname{PGCD}(P, Q)$ .

2. Décomposer  $P$  et  $Q$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

3. Retrouvez le résultat de la question 1.

4. Décomposer  $P$  en facteur irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 32](#)

Exercice 33. (Hors programme)

Soient  $P = X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6$  et  $Q = X^4 + 2X^3 - X - 2$

Déterminer le  $\operatorname{PGCD}$  de  $P$  et  $Q$  et en déduire les racines communes de  $P$  et  $Q$ .

Allez à : [Correction exercice 33](#)

Exercice 34. (Hors programme)

Déterminer les P.G.C.D. des polynômes

$$A = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$$

En utilisant l'algorithme d'Euclide. En déduire les factorisations de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 34](#)

Exercice 35. (Hors programme)

Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes  $P = (X - 1)^2$  et  $Q = X^2 + 1$ .

Allez à : [Correction exercice 35](#)

Exercice 36. (Hors programme)

1. Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes

$$P = 2X^4 + X^3 - 2X - 1 \quad \text{et} \quad Q = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$$

2. En déduire les racines communes de  $P$  et  $Q$ .

Allez à : [Correction exercice 36](#)

Exercice 37. (Hors programme)

Soit  $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

1. Calculer le  $\operatorname{PGCD}$  de  $P$  et  $P'$ .

2. Quelles sont les racines communes à  $P$  et  $P'$  ?

Quelles sont les racines multiples de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  ?

3. Montrer que  $(X^2 + 1)^2$  divise  $P$ .

4. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 37](#)

Exercice 38.

Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  on désigne par  $P(X + 1)$  le polynôme obtenu en remplaçant  $X$  par  $X + 1$  dans  $P$ .

1. Existe-t-il des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré 3 tels que  $P(0) = 1$  ?
2. Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme de degré 3, quel est le degré du polynôme  $P(X + 1) - P(X)$  ?
3. Existe-t-il des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré trois qui vérifient :

$$P(X + 1) - P(X) = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 1$$

(Indication : On pourra dériver le polynôme  $P$  dans l'équation ci-dessus.)

Allez à : [Correction exercice 38](#)

Exercice 39. (Hors programme)

Soit  $n$  un entier strictement positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes  $X^n - 1$  et  $(X - 1)^n$ .
2. Pour  $n = 3$  démontrer qu'il existe un couple de polynômes  $(U, V)$  tel que :  

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Donnez-en un.

Allez à : [Correction exercice 39](#)

Exercice 40. (Hors programme)

1. Déterminer le PGCD et une identité de Bézout des polynômes  $P$  et  $Q$ .

$$P = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1) = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$$

$$Q = (X^2 + 3X + 2)(X^2 + 1) = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2$$

2. Factoriser  $P$  et  $Q$ .

Allez à : [Correction exercice 40](#)

Exercice 41. (Hors programme)

Soit

$$(X + 1)^2 A + (X - 1)^2 B = 1 \quad (E)$$

1. Trouver une solution particulière  $A_0, B_0 \in \mathbb{R}[X]$  de  $(E)$ .
2. En déduire toutes les solutions de  $(E)$ .
3. Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que  $P - 1$  soit un multiple de  $(X + 1)^2$  et que  $P + 1$  soit un multiple de  $(X - 1)^2$ .

Allez à : [Correction exercice 41](#)

Exercice 42. (Hors programme)

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes définis par :

$$P(X) = X^6 - X^4 - X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q(X) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$$

Déterminer le PGCD de  $P$  et  $Q$  et en déduire les racines communes de  $P$  et  $Q$  ainsi que leur multiplicité.

Allez à : [Correction exercice 42](#)

Exercice 43.

Quels sont les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$ .

Allez à : [Correction exercice 43](#)

Exercice 44.

$$\text{Soit } P(X) = 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 3X + 2$$

On pose  $Y = X + \frac{1}{X}$

1. Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$ , de degré 2 tel que  $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$ .
2. Calculer les racines de  $Q$ .
3. En déduire les racines de  $P$ , puis la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Allez à : [Correction exercice 44](#)

Exercice 45.

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , on suppose que  $\sin(n\theta) \neq 0$ .

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Allez à : [Correction exercice 45](#)

Exercice 46.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

Allez à : [Correction exercice 46](#)

Exercice 47.

Décomposer la fractionnelle suivante en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

$$F = \frac{X - 1}{X^2(X^2 + 1)}$$

Allez à : [Correction exercice 47](#)

Exercice 48.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X - 1)(X^2 - 1)}$$

Allez à : [Correction exercice 48](#)

Exercice 49.

Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  les fractions rationnelles suivantes :

- 1.

$$F(X) = \frac{-X^2 + 2X + 1}{(X - 1)^2(X^2 + 1)}$$

- 2.

$$G(X) = \frac{X^3}{(X - 1)(X + 1)}$$

Allez à : [Correction exercice 49](#)

Exercice 50.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

1. Dans  $\mathbb{R}(X)$
2. Dans  $\mathbb{C}(X)$



Allez à : [Correction exercice 50](#)

Exercice 51.

Soit

$$F = \frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

Décomposer  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ , dans  $\mathbb{C}(X)$ .

Allez à : [Correction exercice 51](#)

Exercice 52.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans  $\mathbb{R}(X)$ .

$$F = \frac{X^2}{(X^2 + 1)^{2010}}$$

Allez à : [Correction exercice 52](#)

Exercice 53.

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples.

$$F = \frac{X^8 + X + 1}{X^4(X - 1)^3}$$

Allez à : [Correction exercice 53](#)

Exercice 54.

Décomposer la fraction suivante en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

$$F = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 54](#)

Exercice 55.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans  $\mathbb{R}(X)$  et dans  $\mathbb{C}(X)$

$$G = \frac{X^5}{(X^4 - 1)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 55](#)

Exercice 56.

1. Soit  $F = \frac{P}{Q}$ . Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une racine simple de  $Q$ , montrer que le coefficient de l'élément simple  $\frac{1}{X - \alpha}$  est

$$\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

2. Décomposer dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction

$$F = \frac{X}{X^n - 1}$$

Allez à : [Correction exercice 56](#)

Exercice 57.

On considère le polynôme  $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1$

1. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$
2. Décomposer la fraction  $\frac{X+1}{P}$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$

Allez à : [Correction exercice 57](#)

## CORRECTIONS

Correction exercice 1.

Dans  $\mathbb{R}[X]$

$$P = -(X^8 - 2X^4 + 1) = -(X^4 - 1)^2 = -(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)^2 = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X^2 + 1)^2$$

Dans  $\mathbb{C}[X]$

$$P = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2$$

Allez à : **Exercice 1**

Correction exercice 2.

Première méthode

$P(X) = 1 - X^8 = (1 - X^4)(1 + X^4)$ ,  $(1 - X^4)$  se décompose facilement en

$(1 - X)(1 + X)(i - X)(i + X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)$ , mais pour décomposer  $1 + X^4$ , c'est beaucoup plus délicat, il faut utiliser une bonne ruse, allons-y

$$1 + X^4 = 1 + 2X^2 + X^4 - 2X^2 = (1 + X^2)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (1 + X^2 - \sqrt{2}X)(1 + X^2 + \sqrt{2}X)$$

$1 + X^2 - \sqrt{2}X = X^2 - \sqrt{2}X + 1$  et  $1 + X^2 + \sqrt{2}X = X^2 + \sqrt{2}X + 1$  sont deux polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  car leur discriminant sont négatifs. Donc la décomposition de  $P(X)$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Pour la décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  il suffit de trouver les racines complexes de  $X^2 - \sqrt{2}X + 1$  et  $X^2 + \sqrt{2}X + 1$

Le discriminant de  $X^2 - \sqrt{2}X + 1$  est  $\Delta_1 = (-\sqrt{2})^2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$ , ses racines sont  $X_1 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$  et  $X_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Le discriminant de  $X^2 + \sqrt{2}X + 1$  est  $\Delta_1 = (\sqrt{2})^2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$ , ses racines sont  $X_3 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$  et  $X_4 = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$ .

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i) \left(X - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) \left(X - \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right) \left(X - \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Deuxième méthode

On cherche les racines réelles et complexes de  $1 - X^8 = 0$

$$X^8 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{ik\pi}{4}} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Ce qui donne  $X_0 = 1$ ,  $X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ ,  $X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ ,  $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ ,  $X_4 = e^{i\pi} = -1$ ,  $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ ,  $X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$ ,  $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P(X) = -(X - 1) \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) (X - i) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) (X + 1) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) (X + i) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Pour la décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$ , on regroupe les conjugués

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i) \left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\begin{aligned}
P(X) &= -(X-1)(1+X)(X^2+1)\left(X^2 - \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X^2 - \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}} + e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-3i\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= -(X-1)(X+1)(X^2+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\
&= -(X-1)(X+1)(1+X^2)\left(X^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right)\left(X^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right) \\
&= -(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)
\end{aligned}$$

Dans  $\mathbb{Q}[X]$  on regroupe les deux derniers polynômes

$$\begin{aligned}
P(X) &= -(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^2+1-\sqrt{2}X)(X^2+1+\sqrt{2}X) \\
&= -(X-1)(X+1)(1+X^2)\left((X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2\right) \\
&= -(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^4+1)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1.

$$1+j = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = -j^2$$

Ou mieux

$$1+j+j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$$

$$\text{Car } j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

2.

$$P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^6j - 1 = -j^{14} - j - 1 - j^{12}j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

$$P'(j) = 7((j+1)^6 - j^6) = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(j^{12} - 1) = 7(1 - 1) = 0$$

Donc  $j$  est au moins racine double.

$$3. \quad P(0) = (0+1)^7 - 0^7 - 1 = 1^7 - 1 = 0 \text{ et } P(-1) = (-1+1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0 - (-1) - 1 = 0$$

Donc 0 et  $-1$  sont deux racines évidentes.

$$4. \quad \text{Le début de la formule du binôme de } (X+1)^7 \text{ est } X^7 + 7X^6 \text{ (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc } P \text{ est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.}$$

D'autre part,  $j$  est racine double (au moins) donc  $\bar{j} = j^2$  est aussi racine double (au moins) car  $P$  est un polynôme à coefficients réels. 0 et  $-1$  sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme  $d^\circ P = 6$  on a toutes les racines. La factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$(X-j)(X-\bar{j}) = (X-j)(X-j^2) = X^2 - (j+j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1$$

Donc

$$P = 7X(X+1)\left((X-j)(X-\bar{j})\right)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-X^6 \\ 1-X \\ X \neq 1 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-X^6 = 0 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^6 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Or } X^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}} \text{ avec } k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\text{Ce qui donne } X_0 = 1, X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\bar{j} = -j^2, X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j, X_3 = e^{i\pi} = -1, X_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2, X_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = -j$$

Les 5 racines de  $P$  sont  $X_1 = -j^2$ ,  $X_2 = j$ ,  $X_3 = -1$ ,  $X_4 = j^2$  et  $X_5 = -j$ .

La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P(X) = 1 \times (X + j^2)(X - j)(X + 1)(X - j^2)(X + j) = (X + j^2)(X - j)(X + 1)(X - j^2)(X + j)$$

La décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X + 1)(X - j)(X - j^2)(X + j^2)(X + j) = (X + 1)(X^2 - (j + j^2)X + j^3)(X^2 + (j + j^2)X + j^3) \\ &= (X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1.

$$P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 = \frac{1 - X^8}{1 - X}$$

Pour  $X \neq 1$

Les racines de  $P$  vérifient  $\begin{cases} X^8 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}}, & k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{ik\pi}{4}}, \quad k \in$

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$$X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}, X_4 = e^{i\pi} = -1, X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}, X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i \text{ et } X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

Donc

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

2. On rappelle que

$$(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta) + 1$$

$$\begin{aligned} P &= (X + 1)(X - i)(X + i)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X) = (X + 1)(X^2 + 1)\left((X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2\right) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2) = (X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

$$\begin{aligned} P(X) = 1 + \left(\frac{X}{2}\right) + \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^3 + \left(\frac{X}{2}\right)^4 + \left(\frac{X}{2}\right)^5 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{X}{2}\right)^6}{1 - \frac{X}{2}} = 0 \\ \frac{X}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 0 \\ X \neq 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \\ X \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = 2e^{\frac{2ik\pi}{6}} = 2e^{\frac{ik\pi}{3}} \text{ avec } k \in \{0,1,2,3,4,5\} \text{ donc } X_k = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$$

$$\text{Ce qui donne } X_0 = 2, X_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = -2j = -2j^2, X_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2j, X_3 = 2e^{i\pi} = -2, X_4 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2j^2, X_5 = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} = -2j$$

Les 5 racines de  $P$  sont  $X_1 = -2j^2$ ,  $X_2 = 2j$ ,  $X_3 = -2$ ,  $X_4 = 2j^2$  et  $X_5 = -2j$ . On a enlevé  $X = 2$ .

La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32} \times (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j) \\ &= (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j) \end{aligned}$$

La décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32} (X + 2)(X - 2j)(X - 2j^2)(X + 2j^2)(X + 2j) \\ &= \frac{1}{32} (X + 2)(X^2 - 2(j + j^2)X + 4j^3)(X^2 + 2(j + j^2)X + 4j^3) \\ &= \frac{1}{32} (X + 1)(X^2 + 2X + 4)(X^2 - 2X + 4) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1.

$$P = 1 + (-X) + (-X)^2 + (-X)^3 + (-X)^4 = \frac{1 - (-X)^5}{1 - (-X)} = \frac{1 + X^5}{1 + X}$$

Pour  $X \neq -1$

Les racines vérifient

$$\begin{aligned} \begin{cases} X^5 = -1 \\ X \neq 1 \end{cases} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} |X^5| = |-1| \\ \arg(X^5) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ 5 \arg(X) = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ X \neq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{2k + 1}{5} \pi, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, & k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ X \neq -1 \end{cases} \\ X_0 &= e^{\frac{i\pi}{5}}; X_1 = e^{\frac{3i\pi}{5}}; X_2 = e^{\frac{5i\pi}{5}} = -1; X_3 = e^{\frac{7i\pi}{5}} = e^{\frac{-3i\pi}{5}}; X_4 = e^{\frac{-i\pi}{5}} \end{aligned}$$

On élimine  $X_3 = -1$

2. Dans  $\mathbb{C}[X]$

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{5}}\right)$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$

$$P = \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1\right) \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1\right)$$

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

$$\begin{aligned} P &= 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 = 1 + (-X) + (-X)^2 + (-X)^3 + (-X)^4 + (-X)^5 = \frac{1 - (-X)^6}{1 - (-X)} \\ &= \frac{1 - X^6}{1 + X} \end{aligned}$$

Pour  $X \neq -1$

$$\begin{aligned} P = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} X^6 = 1 \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2ik\pi}{6}} & k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{ik\pi}{3}} & k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow X = e^{\frac{ik\pi}{3}} \quad k \in \{0, 1, 2, 4, 5\} \end{aligned}$$

Car pour  $k = 3$ ,  $X_3 = e^{i\pi} = -1$

Ce polynôme admet cinq racines

$$X_0 = e^0 = 1; X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}; X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}; X_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \overline{X_2} \quad \text{et} \quad X_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \overline{X_1}$$

Donc la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$

$$P = -(X-1)\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

Le signe  $-$  vient du coefficient devant le terme de plus haut degré dans  $P$ .

Et dans  $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{aligned} P &= -(X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1\right) \\ &= -(X-1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

Allez à : [Exercice 8](#)

Correction exercice 9.

$$1. \quad P = X^2(-X+1) + (-X+1) = -(X-1)(X^2+1) \text{ dans } \mathbb{R}[X]$$

$$P = -(X-1)(X-i)(X+i) \text{ dans } \mathbb{C}[X]$$

$$2. \quad \text{Si } X \neq -1.$$

$$P = \sum_{k=0}^{2n-1} (-X)^k = \frac{1 - (-X)^{2n}}{1 - (-X)} = \frac{1 - (-X)^{2n}}{1 + X}$$

Les racines de  $P$  vérifie  $X^{(n+1)} = 1$  et  $X \neq -1$ .

$$\begin{aligned} P(X) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} (-X)^{n+1} = 1 \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -X = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ X \neq -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Allez à : [Exercice 9](#)

Correction exercice 10.

Pour  $X^2 \neq 1$

$$P(X) = 1 + X^2 + (X^2)^2 + (X^2)^3 = \frac{1 - (X^2)^4}{1 - X^2} = \frac{1 - X^8}{1 - X^2}$$

$$\begin{aligned} P(X) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} X^8 = 1 \\ X^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2ik\pi}{8}}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ X \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ X \neq \pm 1 \end{cases} \\ &= e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \end{aligned}$$

Car pour  $k = 0$ ,  $e^{\frac{ik\pi}{4}} = 1$  et pour  $k = 4$ ,  $e^{\frac{ik\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1$

Les racines de  $P$  sont :

$$X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}; X_2 = e^{\frac{2i\pi}{4}} = i; X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}; X_6 = e^{\frac{6i\pi}{4}} = -i \text{ et } X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

La factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P(X) = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)(X-i)(X+i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$$

Et dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

Allez à : [Exercice 10](#)

Correction exercice 11.

$$1.$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1+1-6+4}{16} = 0 \\ P' &= 4X^3 + \frac{1}{2}X - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$P'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

Donc  $\frac{1}{2}$  est au moins racine double (par conséquent racine multiple).

2. D'après la question précédente  $P$  est divisible par  $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = X^2 - X + \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 & + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4} \\
 X^4 - X^3 + \frac{1}{4}X^2 & \\
 \hline
 X^3 & - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4} \\
 X^3 - X^2 + \frac{1}{4}X & \\
 \hline
 X^2 - X + \frac{1}{4} & \\
 X^2 - X + \frac{1}{4} & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 X^2 - X + \frac{1}{4} \\
 \hline
 X^2 + X + 1
 \end{array}$$

Par conséquent

$$P = \left(X^2 - X + \frac{1}{4}\right)(X^2 + X + 1) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 (X^2 + X + 1)$$

Comme le discriminant de  $X^2 + X + 1$  est strictement négatif, il s'agit de la décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$ . Les deux racines de  $X^2 + X + 1$  sont bien connues, il s'agit de  $j$  et  $j^2$  (où alors on les recalcule), ce qui entraîne que la décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est

$$P = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 (X - j)(X - j^2)$$

Allez à : [Exercice 11](#)

Correction exercice 12.

1.

$$P(j) = j^6 + 2j^5 + 4j^4 + 4j^3 + 4j^2 + 2j + 1 = 1 + 2j^2 + 4j + 4 + 4j^2 + 2j + 1 = 6j^2 + 6j + 6 = 6(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 6X^5 + 10X^4 + 16X^3 + 12X^2 + 8X + 2$$

$$P'(j) = 6j^5 + 10j^4 + 16j^3 + 12j^2 + 8j + 2 = 6j^2 + 10j + 16 + 12j^2 + 8j + 2 = 18j^2 + 18j + 18 = 18(j^2 + j + 1) = 0$$

Donc  $j$  est racine double, comme  $P$  est un polynôme à coefficients réels,  $\bar{j}$  est aussi racine double.

On peut essayer de voir si  $j$  ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2. Soit on a l'intuition de voir que  $i$  est racine (et que donc  $-i$  est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser  $P$  par

$$(X - j)^2(X - \bar{j})^2 = ((X - j)(X - \bar{j}))^2 = (X^2 + X + 1)^2 = X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
 X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1 & X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \\
 X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 2X^3 + X^2 & \hline
 X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 & \\
 X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

$$P = (X - j)^2(X - \bar{j})^2(X - i)(X + i)$$

3.

$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 + 1)$$

Allez à : [Exercice 12](#)

## Correction exercice 13.

1.

$$P(j) = j^8 + 2X^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3j^2 + 3j + 3 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$

$j$  est une racine de  $P$

$$P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$$

$$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12j^2 + 12j + 12 = 12(j^2 + j + 1) = 0$$

$j$  est racine au moins double,  $j$  est donc une racine multiple.

2. Comme  $P$  est pair,  $-j$  est aussi une racine double, ce polynôme est à coefficients réels donc  $\bar{j} = j^2$  est racine double et  $\overline{-j} = -j^2$  est aussi racine double, cela fait 8 racines en tout (en comptant la multiplicité de racines), comme ce polynôme est degré 8, on les a toutes. Le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$

$$P = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + j)^2(X + j^2)^2$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$ 

$$P = [(X - j)(X - j^2)]^2[(X + j)(X + j^2)]^2 = [X^2 + X + 1]^2[X^2 - X + 1]^2$$

Allez à : Exercice 13

## Correction exercice 14.

1.

$$P(j) = 2j^3 + 3j^2 + 6j + 1 + 3j = 2 + 3j^2 + 6j + 1 - 3j = 3j^2 + 3j + 3 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 6X^2 + 6X + 6$$

$$P'(j) = 6j^2 + 6j + 6 = 6(j^2 + j + 1) = 0$$

Donc  $j$  est une racine double de  $P$ .

2. La somme des racines de  $P$  est  $-\frac{3}{2}$ , si on appelle  $\alpha$  la troisième racine on a

$$\alpha + 2j = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2} - 2j = -\frac{3}{2} - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}$$

Donc

$$P = 2(X - j)^2\left(X + \frac{1}{2} - i\sqrt{3}\right)$$

Allez à : Exercice 14

## Correction exercice 15.

1.

$$(X + 1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X + 1}{X}\right)^6 = 1$$

Il est clair que 0 n'est pas racine. Mais attention  $(X + 1)^6 - X^6$  est un polynôme de degré 5

$$(X + 1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X + 1}{X}\right)^6 = 1$$

$$\frac{X + 1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

La racine « en trop » est celle qui aurait vérifié  $\frac{X+1}{X} = 1$  qui n'a pas de solution, on enlève donc  $k = 0$ .

$$1 + \frac{1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow X = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Les cinq racines sont



$$X_k = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 1 + i \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)}$$

2. Pour que  $P$  admette une racine multiple réelle (donc au moins double),  $P$  et  $P'$  ont une racine réelle commune.

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

Les racines réelles et complexes de  $P'$  vérifient  $(X+1)^6 - X^6 = 0$

On cherche les racines réelles donc  $\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$  ce qui équivaut à  $k = 0$  (mais on a éliminé ce cas) et  $k = 3$

$$X_3 = \frac{\cos(\pi) - 1}{2 - 2 \cos(\pi)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$P$  admet une racine double si et seulement si  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ .

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + a = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + a = 0 \Leftrightarrow a = -2 \times \frac{1}{2^7} = -\frac{1}{2^6}$$

Et alors

$$P = (X+1)^7 - X^7 - \frac{1}{2^6}$$

Allez à : [Exercice 15](#)

Correction exercice 16.

- La réponse est non car les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. La question ne demande pas de factoriser ce polynôme.
- Les limites de la fonction polynomiale définie par  $B(x) = x^3 + 3x + 1$  en  $-\infty$  vaut  $-\infty$  et en  $+\infty$  vaut  $+\infty$ , cette fonction est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires entraîne qu'il existe  $x_0$  tel que  $B(x_0) = 0$ .  $B$  admet une racine réelle. Ceci dit le même raisonnement qu'au 1°) est valable aussi.

Allez à : [Exercice 16](#)

Correction exercice 17.

$P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$  est factorisable par  $Q = (X^2 - 1)(X - 3)$  si et seulement si  $-1$ ,  $1$  et  $3$  sont racines de  $P$ .

$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^5 - 2 \times (-1)^4 - 6 \times (-1)^3 + a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 0 \\ P(1) = 1^5 - 2 \times 1^4 - 6 \times 1^3 + a \times 1^2 + b + c = 0 \\ P(3) = 3^5 - 2 \times 3^4 - 6 \times 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 + 6 + a - b + c = 0 \\ 1 - 2 - 6 + a + b + c = 0 \\ 3^4(3 - 2 - 2) + 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} a - b + c = -3 \\ a + b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 81 \end{cases} \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$$

$L_2 - L_1$  entraîne que  $2b = 10$  donc  $b = 5$

Et  $L_2 + L_1$  entraîne que  $2a + 2c = 4$  donc  $a + c = 2 : L'_1$

On remplace  $b = 5$  dans  $L_3 : 9a + 15 + c = 81$  donc  $9a + c = 66 : L'_2$

$L'_2 - L'_1$  entraîne que  $8a = 64$  donc  $a = 8$  et donc  $c = 2 - 8 = -6$

Finalement  $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$

Allez à : [Exercice 17](#)

Correction exercice 18.

$A_n$  est divisible par  $B$  si et seulement si les racines de  $B$  sont aussi des racines de  $A_n$ .

Le discriminant de  $X^2 - X + 1$  est  $\Delta = 1 - 4 = -3$  donc les deux racines de  $B$  sont :

$$X_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$

$$X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j$$

Remarque :  $X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow (-X)^2 + (-X) + 1 = 0$

Donc les racines du polynôme  $B$  vérifient

$$-X = j \quad \text{ou} \quad -X = j^2$$

$$A_n(-j) = (-j - 1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^n (j^2)^2 + (-j)^{2n}(-j) = j^{2n}j^4 - j^{2n}j = 0$$

Comme  $A_n$  est un polynôme à coefficients réels,  $-\bar{j} = -j^2$  est aussi racine.

On conclut que  $X^2 - X + 1$  divise  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ .

Allez à : [Exercice 18](#)

Correction exercice 19.

$$P_n(j) = (j + 1)^n - j^n - 1 = (-j^2)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$$

Si  $n = 6p$

$$P_{6p}(j) = j^{12p} - j^{6p} - 1 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$$

Si  $n = 6p + 1$

$$P_{6p+1}(j) = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

Si  $n = 6p + 2$

$$P_{6p+2}(j) = j^{12p+4} - j^{6p+2} - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$$

Si  $n = 6p + 3$

$$P_{6p+3}(j) = -j^{12p+6} - j^{6p+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$$

Si  $n = 6p + 4$

$$P_{6p+4}(j) = j^{12p+8} - j^{6p+4} - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$$

Si  $n = 6p + 5$

$$P_{6p+5}(j) = -j^{12p+10} - j^{6p+5} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$$

Allez à : [Exercice 19](#)

Correction exercice 20.

Il existe  $A, R \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$X^n + X + 1 = A(X - 1)^2 + R \quad (*)$$

Avec  $d^\circ R < 2$  donc il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $R = aX + b$ , ce qui entraîne que  $R' = a$

Prenons  $X = 1$

$$3 = R(1) = a + b$$

On dérive (\*)

$$nX^{n-1} + 1 = A'(X - 1)^2 + A(X - 1) + R'$$

On prend  $X = 1$

$$n + 1 = a$$

On en déduit que

$$b = 3 - a = 3 - (n + 1) = 2 - n$$

Et finalement

$$R = (n + 1)X + 2 - n$$

Allez à : [Exercice 20](#)

Correction exercice 21.

Il existe un unique couple de polynôme  $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $X^n = (X - 1)^2 Q + R$  avec  $d^\circ R \leq 2$ . Il existe donc deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $R = aX + b$

$$X^n = (X - 1)^2 Q + aX + b \quad (*)$$

Pour  $X = 1$

$$1 = a + b$$

Puis on dérive (\*)

$$nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + a$$

Pour  $X = 1$

$$n = a$$

Donc  $b = 1 - n$  et

$$R = nX + 1 - n$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

$$(X+1)^n = (X^2+1)Q + R$$

Or  $d^\circ R < 2$  et donc  $R = aX + b$ .

On pose  $X = i$ .

$$\begin{aligned} (i+1)^n = ai + b &\Leftrightarrow \left( \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right)^n = b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \left( e^{\frac{i\pi}{4}} \right)^n = b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n e^{\frac{ni\pi}{4}} \\ &= b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \left( \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$R = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)X + (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 23.

Il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes, avec  $d^\circ R < 2$  tels que :

$$(X+1)^n = (X-1)^2Q + R$$

Il existe  $a$  et  $b$  réels tels que  $R = aX + b$

$$(X+1)^n = (X-1)^2Q + aX + b \quad (*)$$

On pose  $X = 1$

$$2^n = a + b$$

On dérive (\*)

$$n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + a$$

On pose  $X = 1$

$$n2^{n-1} = a$$

Donc  $b = 2^n - n2^{n-1}$

Finalement

$$R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

Il existe  $Q_n$  et  $R_n$  tels que :

$$A_n = BQ_n + R_n \Leftrightarrow X^n + X + b = (X-a)^2Q_n + R_n$$

Avec  $d^\circ R_n < 2$ . Donc il existe  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que :

$$X^n + X + b = (X-a)^2Q_n + \alpha_n X + \beta_n \quad (1)$$

En dérivant on trouve

$$nX^{n-1} + 1 = (X-a)[2Q_n + (X-a)^2Q'_n] + \alpha_n \quad (2)$$

On fait  $X = a$  dans (1) et dans (2).

$$\begin{cases} a^n + a + b = \alpha_n a + \beta_n \\ na^{n-1} + 1 = \alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = na^n + 1 \\ \beta_n = a^n + a + b - (na^{n-1} + 1)a = -(n-1)a^n + b \end{cases}$$

Donc

$$R_n = (na^n + 1)X - (n-1)a^n + b$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

Il existe  $Q$  et  $R$  tels que  $A = BQ + R$  et  $d^\circ R < d^\circ B = 2$  donc degré de  $R$  est inférieur ou égal à 1 on a alors  $R = aX + b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.

$$A(i) = B(i)Q(i) + R(i) \Leftrightarrow i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \text{ car } B(i) = i^2 + 1 = 0$$

$$\text{Si } n = 2p \quad i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \Leftrightarrow i^{4p} + 2i^{2p} + 1 = ai + b \Leftrightarrow 1 + 2(-1)^p + 1 = ai + b \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 + 2(-1)^p \end{cases}$$

$$\text{Donc } R = 2 + 2(-1)^p$$

$$\text{Si } n = 2p + 1$$

$$\begin{aligned} i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b &\Leftrightarrow i^{4p+2} + 2i^{2p+1} + 1 = ai + b \Leftrightarrow -1 + 2(-1)^p i + 1 = ai + b \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(-1)^p \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } R = 2(-1)^p X$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1. Les quatre racines de  $X^4 - 1 = 0$ , c'est-à-dire  $\{1, i, -1, -i\}$  vérifie  $X^4 = 1$  donc

$(X^4)^n - 1 = 1^n - 1 = 0$  donc ces racines sont des racines de  $X^{4n} - 1$ , on peut mettre  $X^4 - 1$  en facteur dans ce polynôme.

2.

Première méthode :

D'après la première question il existe  $Q_a, Q_b, Q_c$  et  $Q_d$  tels que :

$$X^{4a} - 1 = Q_a(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4a} = Q_a(X^4 - 1) + 1$$

$$X^{4b} - 1 = Q_b(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4b} = Q_b(X^4 - 1) + 1$$

$$X^{4c} - 1 = Q_c(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4c} = Q_c(X^4 - 1) + 1$$

$$X^{4d} - 1 = Q_d(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4d} = Q_d(X^4 - 1) + 1$$

Donc

$$\begin{aligned} P &= X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^{4a}X^3 + X^{4b}X^2 + X^{4c}X + X^{4d} \\ &= (Q_a(X^4 - 1) + 1)X^3 + (Q_b(X^4 - 1) + 1)X^2 + (Q_c(X^4 - 1) + 1)X + Q_d(X^4 - 1) \\ &+ 1 = (X^4 - 1)[Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d] + X^3 + X^2 + X + 1 \\ &= (X - 1)(X^3 + X^2 + X + 1)[Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d] + X^3 + X^2 + X + 1 \\ &= (X^3 + X^2 + X + 1)((X - 1)(Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d) + 1) \end{aligned}$$

Deuxième méthode :  $X^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{X^4 - 1} \Leftrightarrow X^{4n} \equiv 1 \pmod{X^4 - 1}$

Donc

$$\begin{aligned} X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} &= X^{4a}X^3 + X^{4b}X^2 + X^{4c}X + X^{4d} \\ &\equiv 1 \times X^3 + 1 \times X^2 + 1 \times X + 1 \pmod{X^4 - 1} \equiv X^3 + X^2 + X + 1 \pmod{X^4 - 1} \end{aligned}$$

Donc il existe  $Q$  tel que

$$\begin{aligned} X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} &= (X^4 - 1)Q + X^3 + X^2 + X + 1 \\ &= (X^3 + X^2 + X + 1)((X - 1)Q + 1) \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

Les trois racines de  $P$  sont  $\alpha, 2\alpha$  et  $\beta$ , les relations entre les racines et les coefficients de  $P$  donnent

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha \times 2\alpha + \alpha\beta + 2\alpha\beta = -63 \\ \alpha \times 2\alpha \times \beta = -162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha^2 + 3\alpha\beta = -63 \\ 2\alpha^2\beta = -162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ 2\alpha^2 + 3\alpha(-3\alpha) = -63 \\ 2\alpha^2(-3\alpha) = -162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ -7\alpha^2 = -63 \\ -6\alpha^3 = -162 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha^2 = 9 \\ \alpha^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -9 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Les trois racines de  $P$  sont 3, 6 et  $-9$

Allez à : [Exercice 27](#)

Correction exercice 28.

1. On rappelle que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ,  $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$  et  $\alpha\beta\gamma = -q$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

Donc

$$A = 0^2 - 2p = -2p$$

2.  $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$  entraîne que  $\alpha^3 = -p\alpha - q$ , idem pour  $\beta$  et  $\gamma$ .

$$B = -p\alpha - q - p\beta - q - p\gamma - q = -p(\alpha + \beta + \gamma) - 3q = -3q$$

3.

$$C = \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \beta\gamma(\beta + \gamma) = \alpha\beta(-\gamma) + \alpha\gamma(-\beta) + \beta\gamma(-\alpha) = -3\alpha\beta\gamma = 3q$$

4.

$$\begin{aligned} D &= \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\gamma(\alpha^2 + \gamma^2) + \beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2) \\ &= \alpha\beta(-2p - \gamma^2) + \alpha\gamma(-2p - \beta^2) + \beta\gamma(-2p - \alpha^2) \\ &= -2p(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma^2 - \alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\beta\gamma = -2p^2 - \alpha\beta\gamma(\gamma + \beta + \alpha) \\ &= -2p^2 - (q) \times 0 = -2p^2 \end{aligned}$$

Allez à : [Exercice 28](#)

Correction exercice 29.

1. Première méthode

$x$  et  $y$  sont les deux racines du polynôme  $X^2 - 5X + 6$

Le discriminant vaut  $\Delta = 1$  et les racines sont 2 et 3

Seconde méthode

$$y = 5 - x$$

$$\text{Donc } xy = 6 \Leftrightarrow x(5 - x) = 6 \Leftrightarrow 5x - x^2 = 6 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 6 = 0$$

Donc  $x = 2$  ou  $x = 3$

Si  $x = 2$  alors  $y = 5 - 2 = 3$  et si  $x = 3$  alors  $y = 5 - 3 = 2$ , donc les solutions sont 2 et 3.

2. Le système (\*) devient

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 9 \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 15 \\ \alpha\beta\gamma\delta = 18 \end{cases}$$

3.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ 6 + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 9 \\ 6\gamma + 6\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 15 \\ 6\gamma\delta = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 3 \\ 6\gamma + 6\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 15 \\ \gamma\delta = 3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + 3 = 3 \\ 6\gamma + 6\delta + 3\alpha + 3\beta = 15 \\ \gamma\delta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta = 0 \\ 2\gamma + 2\delta + \alpha + \beta = 5 \\ \gamma\delta = 3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \\ \gamma\delta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta = 0 \\ \gamma = -\delta \\ \gamma\delta = 3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ -\delta\alpha + \alpha\delta - \delta\beta + \beta\delta = 0 \\ \gamma = -\delta \\ -\delta^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 0 = 0 \\ \gamma = -\delta \\ \delta = \pm i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \gamma = \mp i\sqrt{3} \\ \delta = \pm i\sqrt{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme  $\alpha + \beta = 5$  et  $\alpha\beta = 6$  alors  $\alpha$  et  $\beta$  valent 2 et 3

Les 4 racines sont 2, 3,  $i\sqrt{3}$  et  $-i\sqrt{3}$

4. Dans  $\mathbb{C}[X]$

$$P = (X - 2)(X - 3)(X - i\sqrt{3})(X + i\sqrt{3})$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$

$$P = (X - 2)(X - 3)(X^2 + 3)$$

Allez à : **Exercice 29**

Correction exercice 30.

$$1. \quad 0 \times P(-1) = (0 - 2)P(0) \Leftrightarrow 0 = -2P(0) \Leftrightarrow P(0) = 0$$

$$1 \times P(0) = (1 - 2)P(1) \Leftrightarrow P(0) = -P(1) \Leftrightarrow 0 = P(1)$$

Donc 0 et 1 sont des racines de  $P$ .

$$2. \quad \text{Soit } a \neq 0 \text{ tel que } P(a) = 0. \quad aP(a - 1) = (a - 2)P(a) \Leftrightarrow aP(a - 1) = 0 \Leftrightarrow P(a - 1) = 0$$

$a - 1$  est une racine de  $P$ .

Soit  $a \neq 1$  tel que  $P(a) = 0$ .

$$\begin{aligned}
(a + 1)P(a + 1 - 1) &= (a + 1 - 2)P(a + 1) \Leftrightarrow (a + 1)P(a) = (a - 1)P(a + 1) \Leftrightarrow 0 \\
&= (a - 1)P(a + 1)
\end{aligned}$$

Donc  $P(a + 1) = 0$ ,  $a + 1$  est une racine de  $P$ .

3. Supposons que  $P$  admette une racine  $a$  telle que  $\operatorname{Re}(a) < 1$  différente de 0 alors  $a - 1$  est racine,  $a - 1$  est différent de 0, donc  $a - 2$  est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a - k$  est racine de  $P$ , ce qui voudrait dire que  $P$  admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.

Supposons que  $P$  admette une racine  $a$  telle que  $\operatorname{Re}(a) > 1$  différente de 1 alors  $a + 1$  est racine,  $a + 1$  est différent de 1, donc  $a + 2$  est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a + k$  est racine de  $P$ , ce qui voudrait dire que  $P$  admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.

0 et 1 sont les deux seules racines de  $P$  si  $P$  n'est pas le polynôme nul.

4. Si  $P$  n'est pas le polynôme nul, comme 0 et 1 sont les seules racines de  $P$  il existe  $\alpha \neq 0$  tels que  $P = \alpha X^k(X - 1)^l$ , et si  $P = 0$  alors  $P = 0 \times X^k(X - 1)^l$  (c'est-à-dire que  $\alpha = 0$ ).

5. Si  $P$  vérifie  $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$  alors  $P$  est de la forme  $P = \alpha X^k(X - 1)^l$ , il faut étudier la réciproque, c'est-à-dire chercher parmi ces polynômes lesquels sont effectivement solution.

On remplace  $P = \alpha X^k(X - 1)^l$  dans  $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$ , on trouve que :

$$X\alpha(X - 1)^k(X - 2)^l = (X - 2)\alpha X^k(X - 1)^l$$

Les puissances en  $X - 2$  sont les mêmes donc  $l = 1$ .

Les puissances en  $X - 1$  sont les mêmes donc  $k = l = 1$

On vérifie qu'alors les puissances en  $X$  sont les mêmes, finalement

$$P = \alpha X(X - 1)$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

$$\begin{array}{r|l} 1 - 2X & + X^3 + X^4 \\ 1 + X + X^2 & \\ \hline -3X - X^2 & + X^3 + X^4 \\ -3X - 3X^2 - 3X^3 & \\ \hline & 2X^2 + 4X^3 + X^4 \\ & 2X^2 + 2X^3 + 2X^4 \\ \hline & 2X^3 - X^4 \end{array}$$

$$1 - 2X + X^3 + X^4 = (1 + X + X^2)(1 - 3X + X^2) + X^3(2 - X)$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1.

$$\begin{array}{r|l} X^3 - X^2 - X - 2 & X^3 - 1 \\ X^3 & - 1 \\ \hline & -X^2 - X - 1 \end{array}$$

$$X^3 - X^2 - X - 2 = (X^3 - 1) \times 1 + (-X^2 - X - 1)$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 & - 1 \\ X^3 + X^2 + X & \\ \hline & -X^2 - X - 1 \\ & -X^2 - X - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$X^3 - 1 = (X^2 + X + 1)(X - 1)$$

$$PGCD(P, Q) = \frac{-X^2 - X - 1}{-1} = X^2 + X + 1$$

2.  $X^2 + X + 1$  est un diviseur de  $P$  (et de  $Q$  bien sur) donc on peut mettre  $X^2 + X + 1$  en facteur dans  $P$ .

$$\begin{array}{r|l} X^3 - X^2 & - X - 2 \\ X^3 + X^2 & + X \\ \hline & -2X^2 - 2X - 2 \\ & -2X^2 - 2X - 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Comme  $X^2 + X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ , la factorisation de  $P$  est :

$$P = (X - 2)(X^2 + X + 1)$$

Et il est évident d'après la deuxième division de l'algorithme d'Euclidienne

$$Q = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

3. Il est alors clair que

$$\text{PGCD}(P, Q) = X^2 + X + 1$$

4. Les deux racines complexes de  $X^2 + X + 1$  sont  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $\bar{j} = j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

Donc

$$P = (X - 2)(X - j)(X - j^2)$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6 & X^4 + 2X^3 - X - 2 \\ X^5 + 2X^4 & X - 1 \\ \hline -X^4 - 6X^3 & + X + 6 \\ -X^4 - 2X^3 & + X + 2 \\ \hline -4X^3 & + 4 \end{array}$$

On peut « éliminer » le  $-4$  dans  $-4X^3 + 4$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2X^3 & - X - 2 \\ X^4 & - X \\ \hline 2X^3 & - 2 \\ 2X^3 & - 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc le  $\text{PGCD}$  de  $P$  et  $Q$  est

$$D = \frac{-4X^3 + 4}{-4} = X^3 - 1$$

Les racines communes de  $P$  et  $Q$  sont celles de  $X^3 - 1$ , c'est-à-dire  $1, j$  et  $j^2$ .

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X - 2 & X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2 \\ X^5 + 3X^4 + 3X^3 & - 2X \\ \hline -X^4 - X^3 - X^2 & - 2 \\ -X^4 - 3X^3 - 3X^2 & + 2 \\ \hline 2X^3 + 2X^2 & - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 3X^3 + 3X^2 & - 2 \\ X^4 + X^3 & - 2X \\ \hline 2X^3 + 3X^2 + 2X & - 2 \\ 2X^3 + 2X^2 & - 4 \\ \hline X^2 + 2X + 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 + 2X^2 & - 4 \\ 2X^3 + 4X^2 + 4X & \\ \hline -2X^2 - 4X & - 4 \\ -2X^2 - 4X & - 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le P.G.C.D. est le dernier reste non nul unitaire donc  $X^2 + 2X + 2$

$A$  et  $B$  sont divisible par  $X^2 + 2X + 2$  (qui n'a pas de racine réelle)

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X - 2 & X^2 + 2X + 2 \\ X^5 + 2X^4 + 2X^3 & X^3 - 1 \\ \hline -X^2 - 2X - 2 & \end{array}$$



$$\begin{array}{r|l} -X^2 - 2X - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc

$$A = (X^2 + 2X + 2)(X^3 - 1)$$

Comme  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  et que  $X^2 + X + 1$  n'a pas de racine réelle, la factorisation de  $A$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2 & X^2 + 2X + 2 \\ \hline X^4 + 2X^3 + 2X^2 & X^2 + X - 1 \\ \hline X^3 + X^2 - 2 & \\ \hline X^3 + 2X^2 + 2X & \\ \hline -X^2 - 2X - 2 & \\ \hline -X^2 - 2X - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc

$$B = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + X - 1)$$

$X^2 + X - 1$  admet deux racines réelles

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$B = (X^2 + 2X + 2) \left( X + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Allez à : [Exercice 34](#)

Correction exercice 35.

$$P = X^2 - 2X + 1$$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X + 1 & X^2 + 1 \\ \hline X^2 & 1 \\ \hline -2X & \\ \hline X^2 - 2X + 1 = 1 \times (X^2 + 1) + (-2X) & \\ \hline X^2 + 1 & -2X \\ \hline X^2 & -\frac{1}{2}X \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$X^2 + 1 = -2X \times \left( -\frac{1}{2}X \right) + 1$$

$$1 = (X^2 + 1) + (-2X) \left( -\frac{1}{2}X \right) = (X^2 + 1) + ((X^2 - 2X + 1) - 1 \times (X^2 + 1)) \left( -\frac{1}{2}X \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left( 1 + \frac{1}{2}X \right) (X^2 + 1) + \left( -\frac{1}{2}X \right) (X - 1)^2$$

Allez à : [Exercice 35](#)

Correction exercice 36.

1.

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 + X^3 - 2X - 1 & 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1 \\ \hline 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1 & 1 \\ \hline 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 & \\ \hline P = 1 \times Q + 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 & \end{array}$$

$$2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1 \quad \left| \quad 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 \right.$$

$$\begin{array}{r|l}
 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 2X & X - 2 \\
 \hline
 -4X^3 & + 3X + 1 \\
 -4X^3 - 6X^2 + 6X + 4 & \\
 \hline
 6X^2 - 3X - 3 & 
 \end{array}$$

$$Q = (X - 2)(2X^3 + 3X^2 - 3X - 2) + 6X^2 - 3X - 3$$

$$\begin{array}{r|l}
 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 & 6X^2 - 3X - 3 \\
 2X^3 - X^2 - X & \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} \\
 \hline
 4X^2 - 2X - 2 & \\
 4X^2 - 2X - 0 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

$$6X^2 - 3X - 3 = Q - (X - 2)(2X^3 + 3X^2 - 3X - 2) = Q - (X - 2)(P - Q)$$

$$= -(X - 2)P + (X - 1)Q$$

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}(X - 2)P + \frac{1}{6}(X - 1)Q$$

2. Les racines communes de  $P$  et  $Q$  sont celles de leur  $PGCD$ , c'est-à-dire celles de  $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$  soit

$$X_1 = 1 \text{ et } X_2 = -\frac{1}{2}.$$

Allez à : [Exercice 36](#)

Correction exercice 37.

1.  $P' = 5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1 & 5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 \\
 X^5 + \frac{4}{5}X^4 + \frac{6}{5}X^3 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{X}{5} & \frac{1}{5}X + \frac{1}{25} \\
 \hline
 \frac{1}{5}X^4 + \frac{4}{5}X^3 + \frac{6}{5}X^2 + \frac{4}{5}X + 1 & \\
 \frac{1}{5}X^4 + \frac{4}{25}X^3 + \frac{6}{25}X^2 + \frac{4}{25}X + \frac{1}{25} & \\
 \hline
 \frac{16}{25}X^3 + \frac{24}{25}X^2 + \frac{16}{25}X + \frac{24}{25} & 
 \end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que  $\frac{16}{25}X^3 + \frac{24}{25}X^2 + \frac{16}{25}X + \frac{24}{25} = \frac{8}{25}(2X^3 + 3X^2 + 2X + 3)$

$$\begin{array}{r|l}
 5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 & 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3 \\
 5X^4 + \frac{15}{2}X^3 + 5X^2 + \frac{15}{2}X & \frac{5}{2}X - \frac{7}{4} \\
 \hline
 -\frac{7}{2}X^3 + X^2 - \frac{7}{2}X + 1 & \\
 -\frac{7}{2}X^3 - \frac{21}{4}X^2 - \frac{7}{2}X - \frac{21}{4} & \\
 \hline
 \frac{25}{4}X^2 + \frac{25}{4} & 
 \end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que  $\frac{25}{4}X^2 + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}(X^2 + 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3 & X^2 + 1 \\
 2X^3 + 2X & 2X + 3 \\
 \hline
 3X^2 + 3 & \\
 3X^2 + 3 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Le PGCD de  $P$  et  $P'$  est  $X^2 + 1$ .

- Les racines communes à  $P$  et  $P'$  sont  $i$  et  $-i$ , les racines multiples de  $P$  sont  $i$  et  $-i$ . Ce sont au moins des racines doubles. Ce ne sont pas des racines triples car sinon  $P$  auraient 6 racines en comptant leurs multiplicités.
- $P$  est divisible par  $(X - i)^2(X + i)^2 = [(X - i)(X + i)]^2 = [X^2 + 1]^2$ .
- il reste à diviser  $P$  par  $(X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$  et on trouve, après calculs,  $X + 1$ , donc
 
$$P = (X^2 + 1)^2(X + 1)$$

Allez à : **Exercice 37**

Correction exercice 38.

- Oui ! Par exemple  $P = X^3 + 1$
- Si  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , avec  $a \neq 0$ , pour qu'il soit de degré exactement 3.
 
$$\begin{aligned} P(X + 1) - P(X) &= a(X + 1)^3 + b(X + 1)^2 + c(X + 1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\ &= a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + c(X + 1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\ &= 3aX^2 + (3a + 2b)X + a + b + c \end{aligned}$$

Le degré de ce polynôme est 2 puisque  $a \neq 0$

3.

$$\begin{cases} P(X + 1) - P(X) = X^2 - 1 \\ P(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a + b)X^2 + (3a + 2b + c)X + a + b + c = X^2 - 1 \\ P(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 2b = -3a = -1 \\ c = -1 - a - b \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6} \\ d = 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{6}X + 1$$

Allez à : **Exercice 38**

Correction exercice 39.

- $(X - 1)^n$  n'a qu'une racine  $X = 1$ , or 1 est racine simple de  $X^n - 1$  donc
 
$$\text{PGCD}((X^n - 1), (X - 1)^n) = X - 1$$
- D'après le théorème de Bézout il existe  $(U, V)$  tels que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Cette équation équivaut à :

$$(X^2 + X + 1)U + (X^2 - 2X + 1)V = 1$$

Car  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  et  $(X - 1)^3 = (X - 1)(X^2 - 2X + 1)$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 \\ \hline X^2 + X + 1 & 1 \\ \hline -3X & \end{array}$$

Donc

$$X^2 - 2X + 1 = 1 \times (X^2 + X + 1) + (-3X)$$

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & -3X \\ \hline X^2 & -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \\ \hline X + 1 & \\ \hline X & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Donc

$$X^2 + X + 1 = (-3X) \left( -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) + 1$$

On en tire que :

$$\begin{aligned} 1 &= (X^2 + X + 1) - (-3X) \left( -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\ &= X^2 + X + 1 - ((X^2 - 2X + 1) - 1 \times (X^2 + X + 1)) \left( -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\ &= - \left( -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) (X^2 - 2X + 1) + \left( 1 + \left( -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \right) (X^2 + X + 1) \\ &= \left( \frac{1}{3}X + \frac{1}{3} \right) (X^2 - 2X + 1) + \left( -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3} \right) (X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Donc

$$U = -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$$

Et

$$V = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$$

Allez à : **Exercice 39**

Correction exercice 40.

1.

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 & X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 \\ X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 & 1 \\ \hline -6X^3 & -6X \end{array}$$

$$X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2 = (X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2) \times 1 + (-6X^3 - 6)$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 & -6X^3 - 6X \\ X^4 & + X^2 \\ \hline 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2 & -\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \\ 3X^3 & + 3X \\ \hline 2X^2 & + 2 \end{array}$$

$$X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (-6X^3 - 6X) \left( -\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) + 2X^2 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} -6X^3 - 6X & 2X^2 + 2 \\ -6X^3 - 6X & -\frac{1}{3}X \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$-6X^3 - 6X = (2X^2 + 2) \left( -\frac{1}{3}X \right)$$

Donc

$$PGCD(X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2, X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) = \frac{2X^2 + 2}{2} = X^2 + 1$$

On trouve une identité de Bézout de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
2X^2 + 2 &= X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 + (-6X^3 - 6X) \left( -\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) \\
&= X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 \\
&\quad - (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2 - (X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2) \times 1) \left( -\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) \\
&= (X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) \left( 1 - \left( -\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&\quad + (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2) \left( \frac{1}{6}X + \frac{1}{2} \right) \\
&= (X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) \left( \frac{1}{6}X + \frac{3}{2} \right) \\
&\quad + (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2) \left( \frac{1}{6}X + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Puis il reste à diviser par 2

$$X^2 + 1 = (X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) \left( \frac{1}{12}X + \frac{3}{4} \right) + (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2) \left( \frac{1}{12}X + \frac{1}{4} \right)$$

2. En divisant  $P$  par  $X^2 + 1$ , on trouve :

$$P = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1)$$

Il reste à factoriser  $X^2 - 3X + 2$ , ce polynôme a deux racines réelles 1 et 2 donc

$$P = (X - 1)(X - 2)(X^2 + 1)$$

En divisant  $Q$  par  $X^2 + 1$ , on trouve :

$$Q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 + 1)$$

Il reste à factoriser  $X^2 + 3X + 2$ , ce polynôme a deux racines réelles  $-1$  et  $-2$  donc

$$Q = (X + 1)(X + 2)(X^2 + 1)$$

Allez à : **Exercice 40**

Correction exercice 41.

1. Je vais juste écrire les résultats des divisions successives de l'algorithme d'Euclide

$$X^2 + 2X + 1 = 1 \times (X^2 - 2X + 1) + 4X$$

$$X^2 - 2X + 1 = \left( \frac{1}{4}X - \frac{1}{2} \right) \times 4X + 1$$

On en déduit une identité de Bézout

$$\begin{aligned}
1 &= (X - 1)^2 - \left( \frac{1}{4}X - \frac{1}{2} \right) \times 4X = (X - 1)^2 - \left( \frac{1}{4}X - \frac{1}{2} \right) ((X + 1)^2 - 1 \times (X - 1)^2) \\
&= \left( -\frac{1}{4}X + \frac{1}{2} \right) (X + 1)^2 + \left( \frac{1}{4}X + \frac{1}{2} \right) (X - 1)^2
\end{aligned}$$

On note

$$A_0 = -\frac{1}{4}X + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$$

2. On a

$$\begin{cases} (X + 1)^2 A + (X - 1)^2 B = 1 \\ (X + 1)^2 A_0 + (X - 1)^2 B_0 = 1 \end{cases}$$

En faisant la soustraction de ces deux équations

$$(X + 1)^2 (A - A_0) + (X - 1)^2 (B - B_0) = 0 \Leftrightarrow (X + 1)^2 (A - A_0) = -(X - 1)^2 (B - B_0)$$

$(X + 1)^2$  divise  $-(X - 1)^2 (B - B_0)$  comme  $(X + 1)^2$  et  $(X - 1)^2$  sont premiers entre eux (ils n'ont aucune racine en commun), d'après le théorème de Gauss  $(X + 1)^2$  divise  $-(B - B_0)$ , il existe  $U \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$-(B - B_0) = U(X + 1)^2 \Leftrightarrow B = B_0 - U(X + 1)^2$$

On remplace dans  $(X + 1)^2 (A - A_0) = -(X - 1)^2 (B - B_0)$

$$(X + 1)^2 (A - A_0) = (X - 1)^2 U(X + 1)^2 \Leftrightarrow A - A_0 = (X - 1)^2 U \Leftrightarrow A = A_0 + U(X - 1)^2$$

L'ensemble des couples  $(A = A_0 + U(X-1)^2, B_0 - U(X+1)^2)$  avec  $U \in \mathbb{R}[X]$  quelconque sont les solutions de (E).

3. On cherche les polynômes  $P$  qui sont de la forme

$$\begin{cases} P - 1 = (X+1)^2 Q_1 \\ P + 1 = (X-1)^2 Q_2 \end{cases}$$

Où  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux polynômes.

En faisant la soustraction de ces deux égalités

$$2 = (X-1)^2 Q_2 - (X+1)^2 Q_1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} Q_1\right)(X+1)^2 + \left(\frac{1}{2} Q_2\right)(X-1)^2 = 1$$

D'après la deuxième question, il existe  $U \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} Q_1 = A_0 + U(X-1)^2 \\ \frac{1}{2} Q_2 = B_0 - U(X+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = -2A_0 - 2U(X-1)^2 \\ Q_2 = 2B_0 - 2U(X+1)^2 \end{cases}$$

Ce qui entraîne que

$$P - 1 = (X+1)^2(-2A_0 - 2U(X-1)^2) \Leftrightarrow P = 1 - 2A_0(X+1)^2 - 2U(X+1)^2(X-1)^2$$

$$\begin{aligned} 1 - 2A_0(X+1) &= 1 - 2\left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X+1) = 1 + \left(\frac{1}{2}X - 1\right)(X^2 + 2X + 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}X^3 + X^2 + \frac{1}{2}X - X^2 - 2X - 1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X \end{aligned}$$

On pose aussi  $V = -2U$ . Par conséquent

$$P = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + V(X^2 - 1)^2, \quad V \in \mathbb{R}[X]$$

Il faut faire une réciproque

$\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1$  admet  $-1$  comme racine double (c'est facile à vérifier) et  $2$  comme racine simple.

$$\begin{aligned} P - 1 &= \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1 + V(X^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(X+1)^2(X-2) + V(X+1)^2(X-1)^2 \\ &= (X+1)^2 \left[ \frac{1}{2}(X-2) + V(X-1)^2 \right] \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1$  admet  $1$  comme racine double (c'est facile à vérifier) et  $-2$  comme racine simple.

$$\begin{aligned} P + 1 &= \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1 + V(X^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(X-1)^2(X+2) + V(X+1)^2(X-1)^2 \\ &= (X-1)^2 \left[ \frac{1}{2}(X+2) + V(X+1)^2 \right] \end{aligned}$$

La réciproque est vérifiée

Allez à : **Exercice 41**

Correction exercice 42.

|                         |         |        |      |                       |
|-------------------------|---------|--------|------|-----------------------|
| $X^6$                   | $-X^4$  | $-X^2$ | $+1$ | $X^4 + 2X^3 - 2X - 1$ |
| $X^6 + 2X^5$            | $-2X^3$ | $-X^2$ |      | $X^2 - 2X + 3$        |
| $-2X^5 - X^4 + 2X^3$    |         |        |      | $+1$                  |
| $-2X^5 - 4X^4$          |         |        |      | $+4X^2 + 2X$          |
| $3X^4 + 2X^3 - 4X^2$    |         |        |      | $-2X + 1$             |
| $3X^4 + 6X^3$           |         |        |      | $-6X - 3$             |
| $-4X^3 - 4X^2 + 4X + 4$ |         |        |      |                       |

$$PGCD(P, Q) = PGCD(Q, -4X^3 - 4X^2 + 4X + 4) = PGCD(Q, X^3 + X^2 - X - 1)$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2X^3 & -2X - 1 \\ \hline & X^3 + X^2 - X - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 + X^3 - X^2 - X & X + 1 \\
 \hline
 X^3 + X^2 - X - 1 & \\
 \hline
 X^3 + X^2 - X - 1 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Donc  $PGCD(P, Q) = X^3 + X^2 - X - 1 = X^2(X + 1) - (X + 1) = (X^2 - 1)(X + 1) = (X - 1)(X + 1)^2$

Les racines complexes communes à  $P$  et  $Q$  sont 1 de multiplicité 1 et  $-1$  de multiplicité 2.

Allez à : [Exercice 42](#)

Correction exercice 43.

On pose  $d^\circ P = n$ .

$P'$  divise  $P$  si et seulement si il existe un polynôme  $Q$  tel que :

$$P = QP'$$

$$d^\circ P = n \text{ et } d^\circ P' = n - 1 \Rightarrow d^\circ Q = 1$$

Donc  $Q$  admet une racine complexe  $\alpha$ .

On pose  $Q = aX + b$  et  $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$  (avec  $a_n \neq 0$ ) alors  $P' = na_n X^{n-1} + \dots + a_1$

En identifiant les coefficients dominant on trouve que :

$$a_n = na \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

Première méthode :

La formule de Taylor pour le polynôme  $P$  en  $\alpha$  donne

$$P = \sum_{k=0}^n a_k (X - \alpha)^k = a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + a_n (X - \alpha)^n$$

Donc

$$\begin{aligned}
 P' &= \sum_{k=0}^n a_k k (X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^n a_k k (X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^n a_k k (X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (X - \alpha)^k \\
 &= a_1 + 2a_2 (X - \alpha) + \dots + na_n (X - \alpha)^{n-1}
 \end{aligned}$$

En changeant  $k$  en  $k + 1$ .

Comme  $Q$  est un polynôme de degré 1 dont  $\alpha$  est une racine donc  $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$

On remplace ces deux expressions dans  $P = QP'$ .

$$\begin{aligned}
 &a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + a_n (X - \alpha)^n \\
 &= a(X - \alpha)[a_1 + 2a_2 (X - \alpha) + \dots + na_n (X - \alpha)^{n-1}] \\
 &\Leftrightarrow a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + a_k (X - \alpha)^k + \dots + a_n (X - \alpha)^n \\
 &= \frac{1}{n} a_1 (X - \alpha) + \frac{2}{n} a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + \frac{k}{n} a_k (X - \alpha)^k \dots + a_n (X - \alpha)^n \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{2}{n} a_1 \\ \vdots \\ a_k = \frac{k+1}{n} a_k \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_k = 0 \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc

$$P = a_n (X - \alpha)^n$$

Deuxième méthode :

En dérivant  $P = QP'$ , et on rappelle que  $Q' = \frac{1}{n}$

$$P' = Q'P' + QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{1}{n}P' + QP'' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{n}{n-1}QP''$$

Donc

$$P = QP' = \frac{n}{n-1}Q^2P''$$

En dérivant  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP''$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)P'' = Q'P'' + QP''' = \frac{1}{n}P'' + QP''' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right)P'' = QP''' \Leftrightarrow P'' = \frac{n}{n-2}QP'''$$

Donc

$$P = \frac{n}{n-1}Q^2P'' = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}Q^3P'''$$

Pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . On montre par récurrence que

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$$

Et que

$$P = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)}$$

On dérive  $\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k+1)} &= Q'P^{(k+1)} + QP^{(k+2)} = \frac{1}{n}P^{(k+1)} + QP^{(k+2)} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)P^{(k+1)} = QP^{(k+2)} \\ &\Leftrightarrow P^{(k+1)} = \frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)} = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}\frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)} \\ &= \frac{n^{k+1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-(k+1))}Q^{k+2}P^{(k+2)} \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie au rang 0, elle est vraie pour tout  $k \leq n-1$ .

On l'applique au rang  $n-1$  :

$$P = \frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}Q^n P^{(n)}$$

$P^{(n)} = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \times a_n$  (ce qui est important c'est que c'est une constante).

Peu importe la constante, il est clair que  $P = KQ^n$ , comme  $Q$  est un polynôme de degré 1, on peut écrire ce polynôme sous la forme :

$$P = \lambda(X - \alpha)^n$$

Allez à : **Exercice 43**

Correction exercice 44.

1.

$$\frac{P(X)}{X^2} = \frac{2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}$$

Comme

$$Y^2 = X^2 + 2 + \frac{1}{X^2} \Rightarrow X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2$$

On a

$$\frac{P(X)}{X^2} = 2\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 3\left(X + \frac{1}{X}\right) - 1 = 2(Y^2 - 2) + 3Y - 1 = 2Y^2 + 3Y - 5$$



Les racines de  $Q$  sont 1 et  $-\frac{5}{2}$

Donc les racines de  $P$  vérifient

$$\begin{cases} X + \frac{1}{X} = 1 \\ X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 1 = X \\ X^2 + 1 = \frac{5}{2}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - X + 1 = 0 \\ X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0 \end{cases}$$

Les racines de  $X^2 - X + 1 = 0$  sont

$$-j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et celles de  $X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0$  sont

$$\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2$$

On en déduit la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = 2 \left( X - \frac{1}{2} \right) (X - 2) (X^2 - X + 1)$$

Et dans  $\mathbb{C}[X]$

$$P(X) = 2 \left( X - \frac{1}{2} \right) (X - 2) (X + j) (X + j^2)$$

Allez à : **Exercice 44**

Correction exercice 45.

1. Comme  $\sin(n\theta) \neq 0$ ,  $d^\circ P = n$ .

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} X^k \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} X^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-ik\theta} X^k = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta} X)^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-i\theta} X)^k \\ &= \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} X)^n - \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} X)^n \end{aligned}$$

Les racines  $z \in \mathbb{C}$  de  $P$  vérifient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} z)^n - \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} z)^n &= 0 \Leftrightarrow (1 + e^{i\theta} z)^n = (1 + e^{-i\theta} z)^n \Leftrightarrow \left( \frac{1 + e^{i\theta} z}{1 + e^{-i\theta} z} \right)^n = 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{1 + e^{i\theta} z}{1 + e^{-i\theta} z} &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, 1 + e^{i\theta} z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} (1 + e^{-i\theta} z) \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, e^{i\theta} z - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} z &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, z \left( e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \right) &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \end{aligned}$$

Il faut quand même vérifier que  $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \neq 0$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} &= 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, 2\theta = \frac{2k\pi}{n} + 2l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \\ &\in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi + nl\pi \Leftrightarrow \sin(n\theta) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$$

Les  $n$  racines de  $P$  sont les complexes  $z_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$  avec  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

2.

$$\begin{aligned}\overline{z_k} &= \frac{\overline{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} = \frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} (e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} (e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} e^{i\theta})} = \frac{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} = z_k\end{aligned}$$

Donc ces complexes sont des réels.

Allez à : [Exercice 45](#)

Correction exercice 46.

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par  $X-1$  puis  $X=1$

$$a = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2 \times 2} = 1$$

Je multiplie par  $X+1$  puis  $X=-1$

$$b = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X^2+1)} \right]_{X=-1} = \frac{-6+3-5}{-2 \times 2} = 2$$

Je multiplie par  $X$ , puis  $X$  tend vers l'infini.

$$6 = a + b + c, \text{ donc } c = 6 - 1 - 2 = 3$$

$$X = 0$$

$$5 = -5 + b + d \text{ donc } d = 5 + 1 - 2 = 4$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3X+4}{X^2+1}$$

Allez à : [Exercice 46](#)

Correction exercice 47.

Il existe  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels tels que :

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

On multiplie par  $X^2+1$ , puis  $X=i$

$$ci + d = \left[ \frac{X-1}{X^2} \right]_{X=i} = \frac{i-1}{-1} = 1-i$$

Donc  $c = -1$  et  $d = 1$

On multiplie par  $X^2$ , puis  $X=0$

$$b = \left[ \frac{X-1}{X^2+1} \right]_{X=0} = -1$$

On multiplie par  $X$ , puis  $X \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c$$

Donc  $a = -c = 1$ , finalement

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{-X+1}{X^2+1}$$

Allez à : [Exercice 47](#)

Correction exercice 48.

Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser  $X^4 - X + 2$  par  $(X-1)(X^2-1) = X^3 - X^2 - X + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 & -X+2 \\
 \hline
 X^4 - X^3 - X^2 + X & \\
 \hline
 X^3 + X^2 - 2X + 2 & \\
 X^3 - X^2 - X + 1 & \\
 \hline
 2X^2 - X + 1 & 
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 X^3 - X^2 - X + 1 \\
 X + 1
 \end{array} \right.$$

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X-1)(X^2-1)} = X + 1 + \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X^2-1)}$$

On pose

$$G(X) = \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X^2-1)} = \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

Je multiplie par  $(X-1)^2$  puis  $X=1$

$$a = \left[ \frac{2X^2 - X + 1}{X+1} \right]_{X=1} = \frac{2}{2} = 1$$

Je multiplie par  $X+1$  puis  $X=-1$

$$c = \left[ \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^2} \right]_{X=-1} = \frac{4}{4} = 1$$

Je multiplie par  $X$  puis  $X$  tend vers l'infini.

$2 = b + c$  donc  $b = 1$ .

Donc

$$F(X) = X + 1 + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$$

Allez à : **Exercice 48**

Correction exercice 49.

1. Il existe  $a, b, c$  et  $d$  tels que :

$$\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par  $(X-1)^2$ , puis  $X=1$

$$b = \left[ \frac{-X^2 + 2X + 1}{X^2 + 1} \right]_{X=1} = \frac{2}{2} = 1$$

Je multiplie par  $X^2+1$ , puis  $X=i$

$$ci + d = \left[ \frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2} \right]_{X=i} = \frac{-i^2 + 2i + 1}{(i-1)^2} = \frac{2+2i}{i^2-2i+1} = \frac{2+2i}{-2i} = \frac{1+i}{-i} = -1+i$$

Donc  $c=1$  et  $d=-1$

Je multiplie par  $X$ , puis  $X \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c$$

Donc  $a=-1$

$$\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X-1}{X^2+1}$$

Autre méthode

On trouve  $b=1$  et  $a+c=0$  comme ci-dessus.

On prend  $X=0$

$$1 = -a + b + d \Leftrightarrow d = a$$

Puis on prend  $X=-1$

$$-\frac{2}{4 \times 2} = -\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{-c+d}{2}$$

On multiplie le tout par 2 et on remplace  $b$  par 1

$$-\frac{1}{2} = -a + \frac{1}{2} - c + d \Leftrightarrow -(a+c) + d = -1 \Leftrightarrow d = -1$$

D'où :  $a = -1$  et  $c = -a = 1$

2.

$$\begin{array}{r|l} X^3 & X^2 - 1 \\ X^3 - X & X \\ \hline X & \end{array}$$

Donc  $X^3 = (X^2 - 1)X + X$  et

$$G(X) = \frac{(X^2 - 1)X + X}{X^2 - 1} = X + \frac{X}{(X-1)(X+1)}$$

Il existe  $a$  et  $b$  des réels tels que

$$\frac{X}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$$

Je multiplie par  $X-1$ , puis  $X=1$

$$a = \left[ \frac{X}{X+1} \right]_{X=1} = \frac{1}{2}$$

Je multiplie par  $X+1$ , puis  $X=-1$

$$b = \left[ \frac{X}{X-1} \right]_{X=-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$G(X) = X + \frac{\frac{1}{2}}{X-1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+1}$$

Allez à : **Exercice 49**

Correction exercice 50.

1.

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par  $X-1$  puis  $X=1$

$$a = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2 \times 2} = 1$$

Je multiplie par  $X+1$  puis  $X=-1$

$$b = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X^2+1)} \right]_{X=-1} = \frac{-6+3-5}{-2 \times 2} = 2$$

Je multiplie par  $X$ , puis  $X$  tend vers l'infini.

$$6 = a + b + c, \text{ donc } c = 6 - 1 - 2 = 3$$

$$X=0$$

$$5 = -5 + b + d \text{ donc } d = 5 + 1 - 2 = 4$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3X+4}{X^2+1}$$

2. Il reste à décomposer dans  $\mathbb{C}[X]$

$$\frac{3X+4}{X^2+1} = \frac{3X+4}{(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{\bar{a}}{X+i}$$

Je multiplie par  $X-i$ , puis  $X=i$ .

$$a = \left[ \frac{3X+4}{X+i} \right]_{X=i} = \frac{3i+4}{2i} = \frac{(3i+4)(-i)}{2} = \frac{3}{2} - 2i$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{\frac{3}{2} - 2i}{X-i} + \frac{\frac{3}{2} + 2i}{X+i}$$

Allez à : **Exercice 50**

Correction exercice 51.

$$\frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2} = \frac{aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{c}{X - 1} + \frac{d}{(X - 1)^2} \quad (*)$$

On multiplie par  $(X - 1)^2$ , puis  $X = 1$

$$d = \left[ \frac{3}{X^2 + X + 1} \right]_{X=1} = 1$$

Première méthode

On multiplie par  $X^2 + X + 1$ , puis  $X = j$

$$aj + b = \left[ \frac{3}{(X - 1)^2} \right]_{X=j} = \frac{3}{(j - 1)^2} = \frac{3}{j^2 - 2j + 1} = \frac{3}{-3j} = -\frac{1}{j} = -j^2 = 1 + j$$

Donc  $b = 1$  et  $a = 1$

On prend  $X = 0$  dans  $(*)$

$$3 = b - c + d \Rightarrow c = -3 + b + d = -3 + 1 + 1 = -1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2} = \frac{X + 1}{X^2 + X + 1} - \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2}$$

Deuxième méthode

$X = 0$  dans  $(*)$

$$3 = b - c + d \Leftrightarrow b - c = 3 - d = 2 \Leftrightarrow b = 2 + c$$

On multiplie par  $X$ , puis  $X \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c \Leftrightarrow a = -c$$

$X = -1$  dans  $(*)$

$$\frac{3}{4} = -a + b - \frac{c}{2} + \frac{d}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = c + (2 + c) - \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - 2 = \frac{3}{2}c \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}c \Leftrightarrow c = -1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2} = \frac{X + 1}{X^2 + X + 1} - \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2}$$

Pour la décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$ , il suffit de décomposer  $\frac{X+1}{X^2+X+1}$ , comme

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

Il existe  $A \in \mathbb{C}$  tel que

$$\frac{X + 1}{X^2 + X + 1} = \frac{X + 1}{(X - j)(X - j^2)} = \frac{A}{X - j} + \frac{\bar{A}}{X - j^2}$$

On multiplie par  $X - j$ , puis  $X = j$

$$A = \left[ \frac{X + 1}{X - j^2} \right]_{X=j} = \frac{j + 1}{j - j^2} = \frac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{X + 1}{X^2 + X + 1} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j} + \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j^2}$$

$$\frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j} + \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j^2} - \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2}$$

Allez à : Exercice 51

Correction exercice 52.

$$F = \frac{X^2 + 1 - 1}{(X^2 + 1)^{2010}} = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + 1)^{2010}} - \frac{1}{(X^2 + 1)^{2010}} = \frac{1}{(X^2 + 1)^{2009}} - \frac{1}{(X^2 + 1)^{2010}}$$

Allez à : Exercice 52

Correction exercice 53.

Il faut d'abord diviser le numérateur par le dénominateur.

$$X^4(X-1)^3 = X^4(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4$$

$$\begin{array}{r|l} X^8 & + X + 1 \\ X^8 - 3X^7 + 3X^6 - X^5 & \\ \hline 3X^7 - 3X^6 + X^5 & + X + 1 \\ 3X^7 - 9X^6 + 9X^5 - 3X^4 & \\ \hline 6X^6 - 8X^5 + 3X^4 & + X + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{X^8 + X + 1}{X^4(X-1)^3} &= \frac{(X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4)(X+3) + 6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X-1)^3} \\ &= X + 3 + \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X-1)^3} \end{aligned}$$

On pose alors

$$G(X) = \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X-1)^3}$$

0 est un pôle d'ordre 4 du dénominateur on effectue alors la division suivant les puissances croissantes de

$1 + X + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6$  par  $(X-1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$  à l'ordre  $4 - 1 = 3$

(Le 4 est le 4 de  $X^4$ )

$$\begin{array}{r|l} 1 + X & + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6 \\ 1 - 3X + 3X^2 & - X^3 \\ \hline 4X - 3X^2 & + X^3 + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6 \\ 4X - 12X^2 + 12X^3 - 4X^4 & \\ \hline 9X^2 & - 11X^3 + 7X^4 - 8X^5 + 6X^6 \\ 9X^2 - 27X^3 + 27X^4 - 9X^5 & \\ \hline 16X^3 & - 20X^4 + X^5 + 6X^6 \\ 16X^3 - 48X^4 + 48X^5 - 16X^6 & \\ \hline 28X^4 & - 47X^5 + 22X^6 \end{array}$$

On en tire

$$\begin{aligned}
& 1 + X + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6 \\
&= (-1 + 3X - 3X^2 + X^3)(-1 - 4X - 9X^2 - 16X^3) + 28X^4 - 47X^5 + 22X^6 \\
&\Leftrightarrow \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{(X-1)^3} \\
&= \frac{(-1 + 3X - 3X^2 + X^3)(-1 - 4X - 9X^2 - 16X^3) + 28X^4 - 47X^5 + 22X^6}{(X-1)^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{(X-1)^3} = -1 - 4X - 9X^2 - 16X^3 + \frac{28X^4 - 47X^5 + 22X^6}{(X-1)^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X-1)^3} = \frac{-1 - 4X - 9X^2 - 16X^3}{X^4} + \frac{X^4(28 - 47X + 22X^2)}{X^4(X-1)^3} \\
&\Leftrightarrow G = -\frac{1}{X^4} - \frac{4}{X^3} - \frac{9}{X^2} - \frac{16}{X} + \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X-1)^3}
\end{aligned}$$

On pose alors

$$H = \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X-1)^3} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3}$$

On multiplie par  $(X-1)^3$ , puis  $X = 1$ .

$$c = [28 - 47X + 22X^2]_{X=1} = 3$$

On multiplie par  $X$ , puis  $X \rightarrow +\infty$

$$22 = a$$

$X = 0$ ,

$$28 = -a + b - c \Leftrightarrow -28 = -22 + b - 3 \Leftrightarrow b = -33$$

Donc

$$H = \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X-1)^3} = \frac{22}{X-1} + \frac{53}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3}$$

Et alors

$$F = X + 3 - \frac{1}{X^4} - \frac{4}{X^3} - \frac{9}{X^2} - \frac{16}{X} + \frac{22}{X-1} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3}$$

Allez à : **Exercice 53**

Correction exercice 54.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division.

La forme de la décomposition est :

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} + \frac{eX + f}{(X^2 + X + 1)^2}$$

On multiplie par  $X^2$ , puis  $X = 0$ .

$$b = \left[ \frac{X^4 + 1}{(X^2 + X + 1)^2} \right]_{X=0} = 1$$

On multiplie par  $(X^2 + X + 1)^2$ , puis  $X = j$ .

$$ej + f = \left[ \frac{X^4 + 1}{X^2} \right]_{X=j} = \frac{j^4 + 1}{j^2} = \frac{j + 1}{j^2} = \frac{-j^2}{j^2} = -1$$

Donc  $e = 0$  et  $f = -1$ .

Ensuite ce n'est pas simple, il manque encore 3 coefficients.

On pourrait multiplier par  $X$  puis faire tendre  $X$  vers l'infini, mais ensuite il faudra prendre deux valeurs et bonjour les fractions pénibles, alors on va inaugurer une nouvelle technique qui sert dans des cas un peu compliqués.

$$\begin{aligned}\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} &= \frac{a}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} + \frac{-1}{(X^2 + X + 1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2} &= \frac{a}{X} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}\end{aligned}$$

J'appelle

$$G = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

C'est une fraction rationnelle, d'après l'unicité de sa décomposition en élément simple, qui est, d'après la ligne ci-dessus,  $\frac{a}{X} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$ , on doit pouvoir, en réduisant au même dénominateur, trouver que le dénominateur de  $G$  est  $X(X^2 + X + 1)$ . On y va.

$$\begin{aligned}G &= \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2} = \frac{X^4 + 1 - (X^2 + X + 1)^2 + X^2}{X^2(X^2 + X + 1)^2} \\ &= \frac{X^4 + X^2 + 1 - (X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X)}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-2X^3 - 2X^2 - 2X}{X^2(X^2 + X + 1)^2} \\ &= \frac{-2}{X(X^2 + X + 1)}\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{-2}{X(X^2 + X + 1)} = \frac{a}{X} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

On multiplie par  $X$ , puis  $X = 0$

$$a = \left[ \frac{-2}{X^2 + X + 1} \right]_{X=0} = -2$$

On multiplie par  $X^2 + X + 1$ , puis  $X = j$ .

$$cj + d = \left[ \frac{-2}{X^2} \right]_{X=j} = \frac{-2}{j^2} = -2j$$

Donc  $c = -2$  et  $d = 0$

Finalement

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{-2X}{X^2 + X + 1} + \frac{-1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

Allez à : **Exercice 54**

Correction exercice 55.

Ensuite je diviserai par 16

$$\begin{aligned}F &= \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{16X^5}{(X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2} \\ &= \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2} + \frac{e}{X - i} + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{\bar{e}}{X + i} + \frac{\bar{f}}{(X + i)^2}\end{aligned}$$

Avec  $a, b, c$  et  $d$  réels et  $e$  et  $f$  complexes.

Il est facile de trouver  $b, d$  et  $f$ .

Je multiplie par  $(X - 1)^2$ , puis  $X = 1$

$$b = \left[ \frac{16X^5}{(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2} \right]_{X=1} = \left[ \frac{16X^5}{(X + 1)^2(X^2 + 1)^2} \right]_{X=1} = 1$$

Je multiplie par  $(X + 1)^2$ , puis  $X = -1$

$$d = \left[ \frac{16X^5}{(X - 1)^2(X - i)^2(X + i)^2} \right]_{X=-1} = \left[ \frac{16X^5}{(X - 1)^2(X^2 + 1)^2} \right]_{X=-1} = -1$$

Je multiplie par  $(X - i)^2$ , puis  $X = i$



$$f = \left[ \frac{16X^5}{(X+1)^2(X-1)^2(X+i)^2} \right]_{X=1} = \left[ \frac{16X^5}{(X^2-1)^2(X+i)^2} \right]_{X=i} = \frac{16i^5}{(-2)^2(2i)^2} = \frac{16i}{4(-4)} = -i$$

$F$  est impaire donc  $F(-X) = -F(X)$ , soit encore :  $-F(-X) = F(X)$

$$-F(-X) = -\left( \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} + \frac{e}{-X-i} + \frac{f}{(-X-i)^2} + \frac{\bar{e}}{-X+i} + \frac{\bar{f}}{(-X+i)^2} \right)$$

$$-F(-X) = \frac{a}{X+1} - \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-1} - \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{e}{X+i} - \frac{f}{(X+i)^2} + \frac{\bar{e}}{X-i} - \frac{\bar{f}}{(X-i)^2}$$

En identifiant les coefficients avec ceux de  $F(X)$ , on a :

$$a = c, b = -d, e = \bar{e} \text{ et } f = -\bar{f}$$

$b = -d$ , ça on le savait déjà,  $e = \bar{e}$  donc  $e$  est réel et  $f = -\bar{f}$  entraîne que  $f$  est un imaginaire pur, ce que l'on savait déjà.

$X = 0$  donne

$$F(0) = 0 = -a + b + c + d + ie - f - i\bar{e} - \bar{f} = -a + c + i(e - \bar{e})$$

Car  $b + d = 0$  et  $-f - \bar{f} = i - i = 0$

Cela donne  $0 = -a + c + i(e - \bar{e}) - a + c + 2i(\operatorname{Im}(e)) = -a + c - 2\operatorname{Im}(e)$

Or  $a = c$  donc  $\operatorname{Im}(e) = 0$  autrement dit  $e$  est réel.

Je multiplie par  $X$ , puis je fais tendre  $X$  vers  $\infty$ .

$$0 = a + c + e + \bar{e} = 2a + 2e$$

Donc  $e = -a$

Comme  $c = a, b = 1, d = -1$  et  $f = -i$

On a :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{a}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{a}{X-i} - \frac{i}{(X-i)^2} - \frac{a}{X+i} + \frac{i}{(X+i)^2}$$

Ceci étant vrai pour tout  $X \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, -i, i\}$ , je prends  $X = 2$ .

$$\frac{16 \times 32}{(16-1)^2} = \frac{a}{2-1} + \frac{1}{(2-1)^2} + \frac{a}{2+1} - \frac{1}{(2+1)^2} - \frac{a}{2-i} - \frac{i}{(2-i)^2} - \frac{a}{2+i} + \frac{i}{(2+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = a + 1 + \frac{a}{3} - \frac{1}{9} - \frac{a(2+i)}{5} - \frac{i(2+i)^2}{5^2} - \frac{a(2-i)}{5} + \frac{i(2-i)^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{4a}{3} + \frac{8}{9} - \frac{4a}{5} - \frac{i(3+4i)}{25} + \frac{i(3-4i)}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{3^2 \times 5^2} = \frac{20-12}{15}a + \frac{8}{9} + \frac{8}{25}$$

$$\Leftrightarrow 16 \times 32 = 8 \times 15a + 8 \times 25 + 8 \times 9 \Leftrightarrow 2 \times 32 = 15a + 25 + 9 \Leftrightarrow 30 = 15a \Leftrightarrow a = 2$$

Donc

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{X-i} - \frac{i}{(X-i)^2} - \frac{2}{X+i} + \frac{i}{(X+i)^2}$$

Il reste à diviser par 16 :

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{X-i} - \frac{\frac{i}{16}}{(X-i)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{X+i} + \frac{\frac{i}{16}}{(X+i)^2}$$

Ensuite pour décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$  il faut réunir les conjugués.

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} \right) - \frac{i}{16} \left( \frac{1}{(X-i)^2} - \frac{1}{(X+i)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{X^5}{(X^4-1)^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{X}{4} - \frac{i}{16} \frac{(X+i)^2 - (X-i)^2}{(X^2+1)^2} \\ \frac{X^5}{(X^4-1)^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{X}{4} - \frac{i}{16} \frac{4iX}{(X^2+1)^2} \\ \frac{X^5}{(X^4-1)^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{X}{4} + \frac{X}{4}\end{aligned}$$

Je vais maintenant décomposer directement cette fraction dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Comme dans  $\mathbb{C}[X]$  je vais décomposer  $F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2}$

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\delta}{(X+1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2+1} + \frac{\eta X + \theta}{(X^2+1)^2}$$

De la même façon, on trouve que  $\beta = 1$  et  $\delta = -1$

Je multiplie par  $(X^2+1)^2$ , puis je prends  $X = i$

$$\eta i + \theta = \left[ \frac{16X^5}{(X^2-1)^2} \right]_{X=i} = \frac{16i^5}{(-1-1)^2} = 4i$$

Donc  $\eta = 4$  et  $\theta = 0$ .

$F$  est impaire donc  $-F(-X) = F(X)$

$$\begin{aligned}-F(-X) &= -\left( \frac{\alpha}{-X-1} + \frac{\beta}{(-X-1)^2} + \frac{\gamma}{-X+1} + \frac{\delta}{(-X+1)^2} + \frac{-\varepsilon X + \zeta}{X^2+1} + \frac{-\eta X + \theta}{(X^2+1)^2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{X+1} - \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{\gamma}{X-1} - \frac{\delta}{(X-1)^2} + \frac{\varepsilon X - \zeta}{X^2+1} + \frac{\eta X - \theta}{(X^2+1)^2} \\ -F(-X) = F(X) &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\delta \\ \zeta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

On savait déjà que  $\beta = -\delta$  et que  $\theta = 0$ .

Pour l'instant on en est à :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{\varepsilon X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Je multiplie par  $X$ , puis on fait tendre  $X$  vers  $\infty$ .

$$0 = \alpha + \gamma + \varepsilon$$

Comme  $\alpha = \gamma$ , on a  $\varepsilon = -2\gamma$ .

On peut essayer  $X = 0$  mais cela redonne  $\alpha = \gamma$ .

Pour l'instant on en est à :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\gamma}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2\gamma X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Comme dans  $\mathbb{C}[X]$ , je vais prendre  $X = 2$ .

$$\begin{aligned}\frac{16 \times 32}{(16-1)^2} &= \gamma + 1 + \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{9} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{5^2} \Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{4\gamma}{3} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{9} + \frac{8}{25} \Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{8\gamma}{15} + \frac{8 \times 34}{9 \times 25} \\ &\Leftrightarrow 16 \times 32 = 8 \times 15\gamma + 8 \times 34 \Leftrightarrow 2 \times 32 = 15\gamma + 34 \Leftrightarrow \gamma = 2\end{aligned}$$

$$F(X) = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{4X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On divise par 16 et voilà.

A partir de là, on peut retrouver la décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$ , pour cela il suffit de décomposer

$$\frac{4X}{X^2+1} = \frac{a}{X-i} + \frac{\bar{a}}{X+i}$$

Et

$$\frac{4X}{(X^2 + 1)^2} = \frac{b}{X - i} + \frac{\bar{b}}{X + i} + \frac{c}{(X - i)^2} + \frac{\bar{c}}{(X + i)^2}$$

A faire.

Troisième méthode

On repart de

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

On va calculer

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(X - 1)^2} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(X + 1)^2(X^2 + 1)^2 - (X - 1)^2(X^2 + 1)^2 + 4X(X - 1)^2(X + 1)^2}{(X - 1)^2(X + 1)^2(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{((X + 1)^2 - (X - 1)^2)(X^2 + 1)^2 + 4X(X^2 - 1)^2}{(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(X^2 + 2X + 1 - X^2 + 2X - 1)(X^4 + 2X^2 + 1) + 4X(X^4 - 2X^2 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \\ &= \frac{4X(X^4 + 2X^2 + 1) + 4X(X^4 - 2X^2 + 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \Leftrightarrow F - \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} - \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{16X^5 - 8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{16X^5 - 8X^5 - 8X}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X^5 - 8X}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X(X^4 - 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X}{X^4 - 1} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \end{aligned}$$

On multiplie par  $X - 1$ , puis  $X = 1$

$$\alpha = \left[ \frac{8X}{(X + 1)(X^2 + 1)} \right]_{X=1} = 2$$

On multiplie par  $X + 1$ , puis  $X = -1$

$$\beta = \left[ \frac{8X}{(X - 1)(X^2 + 1)} \right]_{X=-1} = 2$$

On multiplie par  $X^2 + 1$ , puis  $X = i$

$$\epsilon + i\zeta = \left[ \frac{8X}{X^2 - 1} \right]_{X=i} = -4i \Rightarrow \epsilon = 0 \text{ et } \zeta = -4$$

Donc

$$\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} = \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1} - \frac{4X}{X^2 + 1}$$

Et enfin

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{4X}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

Il ne reste qu'à diviser par 16

Allez à : [Exercice 55](#)

Correction exercice 56.

1.  $\alpha$  est une racine simple de  $Q$  donc il existe  $Q_1$  tel que  $Q = (X - \alpha)Q_1$  avec  $Q_1(\alpha) \neq 0$

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - \alpha)Q_1} = \frac{a}{X - \alpha} + \dots$$

En multipliant par  $X - \alpha$ , puis en faisant  $X = \alpha$ , on trouve (classiquement)

$$a = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

D'autre part

$$Q = (X - \alpha)Q_1 \Rightarrow Q' = Q_1 + (X - \alpha)Q_1'$$

En faisant  $X = \alpha$  dans cette dernière expression on trouve que  $Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$

Par conséquent

$$a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

2.

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

Donc il existe  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tels que :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

En appliquant le résultat du 1°), avec  $P = X$  et  $Q' = nX^{n-1}$

$$a_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n \left( e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^{n-1}} = \frac{1}{n} e^{\frac{2ik(1-(n-1))\pi}{n}} = \frac{1}{n} e^{\frac{2ik(2-n)\pi}{n}} = \frac{1}{n} e^{\frac{4ik\pi}{n}}$$

Donc

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n} e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Allez à : [Exercice 56](#)

Correction exercice 57.

1.  $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1 = X^3(X^2 - 1) + (X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X^3 + 1)$   
 $-1$  est racine de  $X^3 + 1$  donc on peut factoriser par  $X + 1$ , et on trouve, à l'aide d'une division élémentaire  $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ .  $X^2 - X + 1$  n'a pas de racine réelle

On déduit de tout cela que la décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P = (X - 1)(X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1) = (X - 1)(X + 1)^2(X^2 - X + 1)$$

$X^2 - X + 1$  admet deux racines complexes conjuguées

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j \quad \text{et} \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$

La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P = (X - 1)(X + 1)^2(X + j)(X + j^2)$$

2. Il existe  $a, b, c$  et  $d$  réels tels que :

$$\begin{aligned}\frac{X+1}{P} &= \frac{X+1}{(X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)} = \frac{1}{(X-1)(X+1)(X^2-X+1)} \\ &= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}\end{aligned}$$

On multiplie par  $X - 1$ , puis  $X = 1$

$$a = \left[ \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} \right]_{X=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par  $X + 1$ , puis  $X = -1$

$$b = \left[ \frac{1}{(X-1)(X^2-X+1)} \right]_{X=-1} = -\frac{1}{6}$$

On pose  $X = 0$

$$-1 = -a + b + d \Rightarrow d = -1 + a - b = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

On multiplie par  $X$ , puis  $X$  tend vers l'infini

$$0 = a + b + c \Rightarrow c = -a - b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{X+1}{P} = \frac{\frac{1}{2}}{X-1} - \frac{\frac{1}{6}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}}{X^2-X+1}$$

Allez à : **Exercice 57**

Série N°2 D'ALGEBRE I : (SMP,SMC)

**Exercice 1. :**

Déterminer  $a, b, c, u, v \in \mathbb{C}$  pour que les polynômes

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + x^2 - (2+i)cx + 2 \text{ et } Q(x) = x^4 + ux^3 + x + iv$$

vérifient :  $d(P+Q) = 3$  et  $\text{val}(P+Q) = 2$ .

**Exercice 2. :**

Faire la D.E de  $A$  par  $B$  et de  $B$  par  $A$  dans les cas suivants et dire si l'un divise l'autre :

1)  $A = 4x^3 + x^2$  et  $B = x + 1 + i$ ,

2)  $A = (x-1)$  et  $B = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ ,

**Exercice 3. :**

En utilisant l'algorithme d'Euclide donner le pgcd de  $A$  et  $B$  dans les cas suivants :

1)  $A = x^4 - 1$  et  $B = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ .

2)  $A = x^4 + 1$  et  $B = x^4 + x^2 + 1$ .

**Exercice 4. :**

Faire -si possible- la division suivant les puissances croissantes de  $A$  par  $B$  et de  $B$  par  $A$  :

$$A = x^4 - 3x^3 + 2x \text{ et } B = x^2 + 2 \text{ à l'ordre } 3.$$

**Exercice 5. :**

Trouver les racines complexes et leurs ordres de multiplicité des polynômes suivants

1)  $A_1 = 4x^3 + x^2$  et  $A_3 = 64x - 32 - 2x^4 + 16x^3 - 48x^2$ .

2)  $B_1 = (x^4 - 1)^4$  et  $B_2 = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ .

**Exercice 6. :**

a) Décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[x]$  les polynômes suivants :

$$P_1 = x^4 + 1 \text{ et } P_2 = x^4 + x^2 + 1$$

b) Trouver :  $\text{pgcd}(P_1, P_2)$ .

**Exercice 7. :**

Faire la décomposition en éléments simples des fractions suivantes :

1)  $H = \frac{x^3 - x^2 - 3x - 2}{(x+1)^3(x^2+1)}$  dans  $\mathbb{R}(x)$  puis dans  $\mathbb{C}(x)$ .

2)  $I = \frac{1}{x^6 - 1}$  dans  $\mathbb{C}(x)$  puis dans  $\mathbb{R}(x)$ .

### Série N<sup>0</sup>3 D'ALGEBRE I : (SMP,SMC)

#### Exercice 8. :

1) Trouver le quadruplet  $(x, y, z, w)$  vérifiant :

$$5(x, y, z, w) - 6(1, 0, \sqrt{2}, 6) = (-2, 3, -7, 1).$$

2) Peut-on trouver  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que :

$$(2, 0, 3, 1, -5) = \alpha(0, 1, -1, 0, 4) + \beta(-2, 1, 2, 2, 3) ?$$

#### Exercice 9. :

a) Vérifier si  $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

b) Même question avec

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

#### Exercice 10. :

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs

$$X = (2, 0, 3), Y = (-1, 1, 3), Z = (1, 1, 6) \text{ et } W = (4, -2, -3).$$

1) Peut-on écrire  $Z$  comme combinaison linéaire de  $X$  et  $Y$  ?

2) Peut-on écrire  $W$  comme combinaison linéaire de  $X$  et  $Y$  ?

#### Exercice 11. :

Parmi les familles de  $\mathbb{R}^3$  suivantes lesquelles sont libres, génératrices, bases ?

$$a) C_1 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (3, 1, 2); (1, 1, -2))$$

$$b) C_2 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (0, 0, 2); (1, 1, 0))$$

$$c) C_3 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0))$$

$$d) C_4 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (0, 0, 2)).$$

#### Exercice 12. :

On considère dans  $\mathbb{R}^3$ , les deux s.e.v  $F_1$  engendré par la famille  $(u_1; u_2)$  et  $F_2$  engendré par la famille  $(v_1; v_2)$  avec :

$$u_1 = (0, 1, -1), u_2 = (0, 1, 1), v_1 = (0, 1, 2) \text{ et } v_2 = (2, 3, 4).$$

1) Donner des bases et déterminer les dimensions de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_1 \cap F_2$  et  $F_1 + F_2$ .

2) Déterminer  $\alpha$  pour que  $x = (1, \alpha, 2)$  appartienne à  $F_2$ .

**Solution de la série N°2 D'ALGEBRE I : (SMP,SMC)**

**Solution 1. :**

On a

$$P(x) + Q(x) = (ax^4 + bx^3 + x^2 - (2+i)cx + 2) + (x^4 + ux^3 + x + iv) \\ = (a+1)x^4 + (b+u)x^3 + x^2 + (-(2+i)c+1)x + (2+iv)$$

Et donc  $d^\circ(P+Q) = 3 \iff (a+1) = 0$  et  $(b+u) \neq 0$

$$\iff a = -1 \text{ et } b \neq -u.$$

et val $(P+Q) = 2 \iff (2+iv) = 0$  et  $(-(2+i)c+1) = 0$  et le coefficient de  $x^2$  non nul

$$\iff v = 2i \text{ et } c = \frac{1}{5}(2-i).$$

**Solution 2. :**

1) La DE de  $A = 4x^3 + x^2$  par  $B = x + 1 + i$  donne

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + x^2 & x + 1 + i \\ 4x^3 + 4x^2(1+i) & 4x^2 + (-3-4i)x + (7i-1) \\ \hline x^2(-3-4i) & \\ x^2(-3-4i) + (1-7i)x & \\ \hline (7i-1)x & \\ (7i-1)x + (6i-8) & \\ \hline (8-6i) & \end{array}$$

d'où

$$4x^3 + x^2 = (x + 1 + i)(4x^2 + (-3-4i)x + (7i-1)) + (8-6i)$$

La DE de  $B$  par  $A$  donne tout de suite  $B = 0.A + B$   $Q = 0$  et  $R = B$  ( car  $d^\circ(B) < d^\circ(A)$  ).

Et donc  $A$  ne divise pas  $B$  et  $B$  ne divise pas  $A$ .

2) La DE de  $A = (x-1)$  par  $B = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$  donne tout de suite  $Q = 0$  et  $R = A = (x-1)$ , ceci car  $d^\circ(A) < d^\circ(B)$

La DE de  $B = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$  par  $A = (x-1)$  donne  $Q = x^3 - x^2 + x - 1$  et  $R = 0$ ,

$B$  ne divise pas  $A$  et  $A$  divise  $B$ .

**Solution 3. :**

1)  $A = x^4 - 1$  et  $B = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ .

$$\text{On a } A = Q_1B + R_1 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)B + \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}\right)$$

$$\text{et } B = Q_2R_1 + R_2 = \left(\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}\right)R_1 + 0.$$

$$R_2 = 0 \text{ donc le dernier reste non nul est } R_1 = \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}\right).$$

$$D'où \text{ pgcd}(A, B) = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}\right) = x^2 - 1.$$

2)  $A = x^4 + 1$  et  $B = x^4 + x^2 + 1$ . On a

$A = Q_1B + R_1 = 1.B + (-x^2)$  et  $B = Q_2R_1 + R_2 = (-x^2 - 1)R_1 + 1$ . Comme  $R_2$  est constant donc le reste qui suit est 0. D'où  $\text{pgcd}(A, B) = R_2 = 1$ . Ainsi  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.



**Solution 4. :**

1) La dspc de  $A$  par  $B$  à l'ordre 3 donne  $A = (x - 2x^3)B + x^4(1 + 2x)$   
 et la dspc de  $B$  par  $A$  n'est pas possible puisque  $A(0) = 0$ .

**Solution 5. :**

1) On a  $A_1 = 4x^3 + x^2 = x^2(4x + 1) = 4(x - 0)^2(x - (-\frac{1}{4}))$ ,  
 $A_1$  de degré trois a trois racines toutes réelles  
 $x_1 = x_2 = 0$  donc 0 racine double et  $x_3 = -\frac{1}{4}$  racine simple.

Pour  $A_2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$  on remarque que  $A_2(1) = 0$   
 on calcule successivement  $A_2'(1) = 0$ ,  $A_2''(1) = 0$ ,  $A_2^{(3)}(1) = 0$  et  $A_2^{(4)}(1) \neq 0$ .  
 Donc 1 est racine d'ordre quatre de  $A_2$   
 comme  $d^\circ A_2 = 4$ , on a  $A_2 = \alpha(x - 1)^4$  avec  $\alpha = 1$  le coefficient de  $x^4$ .

De même pour  $A_3 = 64x - 32 - 2x^4 + 16x^3 - 48x^2$  on remarque que  $A_3(2) = 0$   
 on calcule successivement  $A_3'(2) = 0$ ,  $A_3''(2) = 0$ ,  $A_3^{(3)}(2) = 0$  et  $A_3^{(4)}(2) \neq 0$ .  
 Donc 2 est racine d'ordre quatre de  $A_3$   
 comme  $d^\circ A_3 = 4$ , on a  $A_3 = \alpha(x - 2)^4$  avec  $\alpha = 2$  le coefficient de  $x^4$ .  
 D'où  $A_3 = 2(x - 2)^4$ .

2) Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $z = re^{\theta i}$ ,  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , par des équivalences on a :

$$\begin{aligned} B_1(z) = 0 &\Leftrightarrow z^4 = 1 &&\Leftrightarrow r^4 e^{4\theta i} = e^{0i} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} &&\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

on trouve quatre racines distinctes chacune d'ordre deux. Donc  $B_1$  a huit racines en tout :

$$\begin{aligned} z_0 = e^{0i} = 1, \quad z_1 = e^{\frac{2\pi}{4}i} = i, \quad z_2 = e^{\frac{4\pi}{4}i} = -1 \quad \text{et} \quad z_3 = e^{\frac{6\pi}{4}i} = -i \\ \text{d'où } B_1 = (x^4 - 1)^2 = (x - 1)^2(x - i)^2(x + 1)^2(x + i)^2 \text{ dans } \mathbb{C}[x] \\ \text{et } B_1 = (x^4 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 1)^2 \text{ dans } \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

Pour  $B_2 = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$  on remarque que  $x_1 = 1$  est racine de  $B_1$  puisque  $B_2(1) = 0$

et on divise  $B_2$  par  $(x - 1)$  ce qui donne  $B_2 = (x - 1)(2x^2 + 3x + 1)$ .

Les racines de  $(2x^2 + 3x + 1)$  sont  $x_2 = -1$  et  $x_3 = -\frac{1}{2}$

Ainsi  $B_2$  a trois racines simples 1, -1 et  $-\frac{1}{2}$

D'où  $B_2 = \alpha(x - 1)(x + 1)(x + \frac{1}{2}) = 2(x - 1)(x + 1)(x + \frac{1}{2})$ .

**Solution 6. :**

Le polynôme  $P_1 = x^4 + 1$  est de degré 4 donc s'écrit comme produit de deux polynômes du second degré. Puisque son coefficient dominant est 1 et  $P(0) = 1$  alors :

il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$ .

Donc il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $x^4 + 1 = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 + (a + b)x + 1$

Ce qui équivaut à  $\begin{cases} a + b = 0 \\ ab + 2 = 0 \end{cases}$  et donc à  $b = -a$  et  $a^2 = 2$ .

On trouve alors  $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ .

Puisque les discriminants de ces polynômes sont égaux à  $\Delta = -2$  alors ils sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[x]$ . Par suite la factorisation en facteurs irréductibles dans

$\mathbb{R}[x]$  est :

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Pour le polynôme  $P_2 = x^4 + x^2 + 1$  on peut faire comme avant pour trouver  $a$  et  $b$  tels que  $P_2 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$ .

Ou tout de suite on a :

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$$

Et par l'identité remarquable

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Comme leurs discriminants sont égaux à  $\Delta = -3$ , ils sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[x]$ .  
La factorisation dans  $\mathbb{R}[x]$  de  $P_2$  est alors

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Pour le polynôme  $P_3 = (x^2 - x + 1)^2 + 1$ , on peut faire comme pour  $P_1$  ou on écrit que :

$$\begin{aligned} (x^2 - x + 1)^2 + 1 &= ((x^2 + 1) - x)^2 + 1 &= [(x^2 + 1)^2 - 2x(x^2 + 1) + x^2] + 1 \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2x(x^2 + 1) + (x^2 + 1) &= (x^2 + 1)(x^2 + 1 - 2x + 1). \end{aligned}$$

Comme  $(x^2 + 1)$  et  $(x^2 - 2x + 2)$  sont à discriminants négatifs, la factorisation de  $P_3$  dans  $\mathbb{R}[x]$  est donnée par

$$P_3 = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2).$$

b) D'après ce qui précède il n'y a pas de facteurs irréductibles en commun dans les décompositions de  $P_1$  et de  $P_2$ . Par suite on a  $\text{PGCD}(P_1, P_2) = 1$ .  
Et pour la même raison  $\text{PGCD}(P_1, P_3) = 1$  et  $\text{PGCD}(P_2, P_3) = 1$

### **Solution 7.** :

1) Posons  $x + 1 = y$  et donc  $x = y - 1$ , on a

$$H = \frac{x^3 - x^2 - 3x - 2}{(x + 1)^3(x^2 + 1)} = \frac{y^3 - 4y^2 + 2y - 1}{y^3(y^2 - 2y + 2)}$$

la dspe de  $(y^3 - 4y^2 + 2y - 1)$  par  $(y^2 - 2y + 2)$  à l'ordre  $3 - 1 = 2$   
donne  $(y^3 - 4y^2 + 2y - 1) = (\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}y + \frac{-5}{4}y^2)(y^2 - 2y + 2) + y^3(-2 + \frac{5}{4}y)$   
On revient ensuite à la variable  $x$  pour écrire :

$$H = \frac{-\frac{5}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)^3} + \frac{\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}}{(x^2+1)}$$

Pour avoir la des dans  $\mathbb{C}[x]$  on continue

$$\frac{\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}}{(x^2+1)} = \frac{s}{x-i} + \frac{t}{x+i}$$

on trouve  $s = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}i$  et  $t = \frac{5}{8} - \frac{3}{8}i$ .

Dans  $\mathbb{C}(x)$  on aura

$$H = \frac{-\frac{5}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)^3} + \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8}i}{x-i} + \frac{\frac{5}{8} - \frac{3}{8}i}{x+i}$$

2) Les racines de  $x^6 + 1$  sont  $x_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}}$  avec  $0 \leq k \leq 5$ .

$$x_o = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, x_1 = i, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \overline{x_2}, x_4 = -i = \overline{x_1} \text{ et } x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \overline{x_o}.$$

Dans  $\mathbb{C}(x)$  on aura

$$I = \frac{P}{Q} = \frac{a_o}{(x-x_o)} + \frac{a_1}{(x-x_1)} + \frac{a_2}{(x-x_2)} + \frac{a_3}{(x-x_3)} + \frac{a_4}{(x-x_4)} + \frac{a_5}{(x-x_5)}$$

puisque les pôles sont simples on a tout de suite  $a_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} = \frac{1}{6x_k^5} = -\frac{x_k}{6}$

(car  $x_k^6 + 1 = 0$  et donc  $x_k^5 = -\frac{1}{x_k}$ ).

Finalement

$$I = -\sum_{k=0}^5 \frac{\frac{x_k}{6}}{(x-x_k)} = -\frac{1}{6} \left( \frac{x_o}{(x-x_o)} + \frac{x_1}{(x-x_1)} + \frac{x_2}{(x-x_2)} + \frac{x_3}{(x-x_3)} + \frac{x_4}{(x-x_4)} + \frac{x_5}{(x-x_5)} \right)$$

## Série d'Algèbre $N^o$ 3

### Espaces vectoriels réels

#### Exercice 1.

- (1) Trouver le quadruplet  $(x, y, z, w)$  tel que:

$$5(x, y, z, w) - 6(1, 0, \sqrt{2}, 6) = (-2, 3, -7, 1).$$

- (2) Peut-on trouver  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que:

$$(2, 0, 3, 1, -5) = \alpha(0, 1, -1, 0, 4) + \beta(-2, 1, 2, 2, 3)? \quad \square$$

#### Exercice 2.

- (1) On considère dans l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^2$  la partie:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}.$$

Est-ce un sous-espace vectoriel ? Justifier.

- (2) Même questions, dans l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$ , pour la partie:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}. \quad \square$$

**Exercice 3.** On considère dans l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs

$$u = (2, 0, 3), \quad v = (-1, 1, 3), \quad z = (1, 1, 6), \quad w = (4, -2, -3).$$

Peut-on écrire les vecteurs  $z$  (resp.  $w$ ) comme une combinaison linéaire de  $u$  et  $v$  ?

**Exercice 4.** Parmi les familles de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$  suivantes lesquelles sont libres, génératrices ou bases ?

- (1)  $\mathcal{C}_1 = \{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (3, 1, 2), (1, 1, -2)\}$ .
- (2)  $\mathcal{C}_2 = \{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0)\}$ .
- (3)  $\mathcal{C}_3 = \{(1, 0, 2), (2, 1, 0)\}$ .
- (4)  $\mathcal{C}_4 = \{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ .

**Exercice 5.** On considère dans l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$  les deux sous-espaces vectoriels  $F_1, F_2$  engendrés, respectivement, par les familles

$$\{u_1, u_2\} \quad \text{et} \quad \{v_1, v_2\}$$

avec  $u_1 = (0, 1, -1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $v_1 = (0, 1, 2)$ ,  $v_2 = (2, 3, 4)$ .

- (1) Donner des bases et déterminer les dimensions de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_1 \cap F_2$  et  $F_1 + F_2$ .
- (2) Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour que  $(1, \alpha, 2)$  appartienne à  $F_2$ .

.

.

.

.

.

**Solution de la série N°3 D'ALGEBRE I : (SMP,SMC)**

**Solution 1. :**

1) Par équivalence on a :

$$\begin{aligned} 5(x, y, z, w) - 6(1, 0, \sqrt{2}, 6) &= (-2, 3, -7, 1) \iff 5(x, y, z, w) = 6(1, 0, \sqrt{2}, 6) + (-2, 3, -7, 1) \\ &\iff (5x, 5y, 5z, 5w) = (6, 0, 6\sqrt{2}, 36) + (-2, 3, -7, 1) \\ &\iff (5x, 5y, 5z, 5w) = (4, 3, 6\sqrt{2} - 7, 37) \end{aligned}$$

Ce équivaut à

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{6\sqrt{2}-7}{5} \\ w = \frac{37}{5} \end{cases}$$

d'où  $(x, y, z, w) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6\sqrt{2}-7}{5}, \frac{37}{5})$ .

2) Par équivalence on a :

$$\begin{aligned} (2, 0, 3, 1, -5) &= \alpha(0, 1, -1, 0, 4) + \beta(-2, 1, 2, 2, 3) \\ \iff (2, 0, 3, 1, -5) &= (0, \alpha, -\alpha, 0, 4\alpha) + (-2\beta, \beta, 2\beta, 2\beta, 3\beta) \\ \iff (2, 0, 3, 1, -5) &= (-2\beta, \alpha + \beta, -\alpha + 2\beta, 2\beta, 4\alpha + 3\beta) \\ \iff \begin{cases} -2\beta &= 2 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ -\alpha + 2\beta &= 3 \\ 2\beta &= 1 \\ 4\alpha + 3\beta &= -5 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \beta &= -1 \\ \alpha &= -\beta = 1 \\ -1 + 2(-1) = -3 &= 3 \\ 2(-1) &= 1 \\ 4(1) + 3(-1) &= -5 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible (on peut remarquer que les équations (1) et (4) du système donnent tout de suite une absurdité).

Donc le vecteur  $(2, 0, 3, 1, -5)$  ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $(0, 1, -1, 0, 4)$  et  $(-2, 1, 2, 2, 3)$ .

**Solution 2. :**

a) Soit  $(u, v) \in F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$   
alors  $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v) = (u', v')$ .

Pour tout  $\alpha \leq 0$  on a  $u' \leq 0$  et donc  $(u', v') \notin F_1$ .

On a la stabilité pour l'addition mais pas pour la multiplication par un scalaire.

Par suite  $F_1$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

b) On a  $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$  :

i)  $(0, 0, 0) \in F_2$  car  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  et  $0 = 0$  et  $2 \times 0 - 0 = 0$ .

ii) soient  $U = (x, y, z)$  et  $V = (x', y', z') \in F_2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha U + V &= \alpha(x, y, z) + (x', y', z') = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z') \\ &= (x'', y'', z'') \end{aligned}$$

et l'on a  $z'' = \alpha z + z' = 0$

et  $2x'' - y'' = 2(\alpha x + x') - (\alpha y + y')$

$= \alpha(2x - y) + (2x' - y') = 0$

Ce qui montre que  $\alpha U + V \in F_2$ .

Par suite  $F_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$

**Solution 3. :**

$X = (2, 0, 3)$ ,  $Y = (-1, 1, 3)$ ,  $Z = (1, 1, 6)$  et  $W = (4, -2, -3)$ .

1) S'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $Z = \alpha X + \beta Y$  on aura :

$$\begin{aligned} Z = \alpha X + \beta Y &\iff (1, 2, 6) = (2\alpha - \beta, \beta, 3\alpha + 3\beta) \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ \beta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = \frac{1+\beta}{2} = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = \frac{6-3\beta}{3} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve donc  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ . On peut donc écrire  $Z$  comme combinaison linéaire de  $X$  et  $Y$ .

On a donc  $Z = 1.X + 1.Y$

2) S'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $W = \alpha X + \beta Y$  on aura :

$$\begin{aligned} W = \alpha X + \beta Y &\iff (4, -2, -3) = (2\alpha - \beta, \beta, 3\alpha + 3\beta) \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha - \beta = 4 \\ \beta = -2 \\ 3\alpha + 3\beta = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = \frac{4+\beta}{2} = 1 \\ \beta = -2 \\ \alpha = \frac{3-3\beta}{3} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible ! On ne peut donc écrire  $W$  comme combinaison linéaire de  $X$  et  $Y$ .

**Solution 4. :**

a) Soient  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , cherchons les solutions  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$  telles que :

$$\alpha(1, 0, 2) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(3, 1, 2) + \lambda(1, 1, -2) = (x, y, z)$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \lambda = x & (l_1) \\ \beta + \gamma + \lambda = y & (l_2) \\ 2\alpha + 2\gamma - 2\lambda = z & (l_3) \end{cases}$$

et ensuite à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \lambda = x & (l_1) \\ \beta + \gamma + \lambda = y & (l_2) \\ -4\beta - 4\gamma - 4\lambda = z - 2x & (l'_3 = l_3 - 2l_1) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \lambda = x & (l_1) \\ \beta + \gamma + \lambda = y & (l_2) \\ 0 = z - 2x + 4y & (l''_3 = l'_3 + 4l_2) \end{cases}$$

L'équation  $0 = z - 2x + 4y$  n'est pas vérifiée pour un triplet quelconque de  $\mathbb{R}^3$ .

La famille  $C_1 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (3, 1, 2); (1, 1, -2))$  n'est donc pas génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour voir si elle est libre on remplace  $(x, y, z)$  par  $(0, 0, 0)$  et le système donne

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \lambda &= 0 \\ \beta + \gamma + \lambda &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

donc admet une infinité de solutions. La famille  $C_1 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (3, 1, 2); (1, 1, -2))$  n'est donc pas libre.

b) Soient  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , cherchons les solutions  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$  telles que :

$$\alpha(1, 0, 2) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(0, 0, 2) + \lambda(1, 1, 0) = (x, y, z)$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \lambda &= x & (l_1) \\ \beta + \lambda &= y & (l_2) \\ 2\alpha + 2\gamma &= z & (l_3) \end{cases}$$

et ensuite à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \lambda &= x & (l_1) \\ \beta + \lambda &= y & (l_2) \\ -4\beta + 2\gamma - 2\lambda &= z - 2x & (l'_3 = l_3 - 2l_1) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \lambda &= x & (l_1) \\ \beta + \lambda &= y & (l_2) \\ 2\gamma + 2\lambda &= z - 2x + 4y & (l'_3 + 4l_2) \end{cases}$$

On garde  $\lambda$  comme paramètre et l'on obtient

$$\begin{cases} \alpha &= x - 2y + \lambda \\ \beta &= y - \lambda \\ \gamma &= \frac{z - 2x + 4y}{2} - \lambda \\ \lambda &\text{ quelconque dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Le système admet toujours des solutions. La famille  $C_2 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (0, 0, 2); (1, 1, 0))$  est donc génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour voir si elle est libre on remplace  $(x, y, z)$  par  $(0, 0, 0)$  et le système donne

$$\begin{cases} \alpha &= 2\lambda \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= -\lambda \\ \lambda &\text{ quelconque dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

donc admet une infinité de solutions. La famille  $C_2 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (0, 0, 2); (1, 1, 0))$  n'est donc pas libre.

c) Soient  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , cherchons les solutions  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  telles que :

$$\alpha(1, 0, 2) + \beta(2, 1, 0) = (x, y, z)$$



ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= x & (l_1) \\ \beta &= y & (l_2) \\ 2\alpha &= z & (l_3) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{z}{2} + 2y &= x \\ \beta &= y \\ \alpha &= \frac{z}{2} \end{cases}$$

L'équation  $\frac{z}{2} + 2y = x$  n'est pas vérifiée pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  quelconque.

Donc la famille  $C_3 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0))$  n'est pas génératrice.

Ensuite avec  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  le dernier système donne

$$\begin{cases} 0 &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{cases}$$

qui admet l'unique solution  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ .

Ainsi la famille  $C_3 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0))$  est libre.

d) Soient  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , cherchons les solutions  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  telles que :

$$\alpha(1, 0, 2) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(0, 0, 2) = (x, y, z)$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= x & (l_1) \\ \beta &= y & (l_2) \\ 2\alpha + 2\gamma &= z & (l_3) \end{cases}$$

et ensuite à

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= x & (l_1) \\ \beta &= y & (l_2) \\ -4\beta + 2\gamma &= z - 2x & (l'_3 = l_3 - 2l_1) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= x & (l_1) \\ \beta &= y & (l_2) \\ 2\gamma &= z - 2x + 4y & (l'_3 + 4l_2) \end{cases}$$

Et l'on obtient

$$\begin{cases} \alpha &= x - 2y \\ \beta &= y \\ \gamma &= \frac{z - 2x + 4y}{2} \end{cases}$$

Le système admet toujours des solutions. La famille  $C_4 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (0, 0, 2))$  est donc génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour voir si elle est libre on remplace  $(x, y, z)$  par  $(0, 0, 0)$  et le système donne

$$\begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

donc admet l'unique solution  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ . La famille  $C_4 = ((1, 0, 2); (2, 1, 0); (0, 0, 2))$  est donc libre.

$C_4$  est donc une base de  $\mathbb{R}^3$  puisqu'elle est libre et génératrice.

**Solution 5. :**

– Soit  $F_1 = \text{vect}(\{(0, 1, -1), (0, 1, 1)\})$ .

Et soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Par des équivalences logiques on a :

$$\begin{aligned}\alpha(0, 1, -1) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0) &\iff (0, \alpha + \beta, -\alpha + \beta) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 & (l_1) \\ -\alpha + \beta = 0 & (l_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 0 & \frac{(l_1) - (l_2)}{2} \\ \beta = 0 & \frac{(l_1) + (l_2)}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc la famille  $\{(0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$  est libre. Puisqu'elle engendre  $F_1$ , c'est alors une base de  $F_1$ , et par suite  $\dim(F_1) = 2$ .

De même pour  $F_2 = \text{vect}(\{(0, 1, 2), (2, 3, 4)\})$  on écrit :

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned}\alpha(0, 1, 2) + \beta(2, 3, 4) = (0, 0, 0) &\iff (2\beta, \alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Ce qui assure que la famille  $\{(0, 1, 2), (2, 3, 4)\}$  est libre. Donc c'est une base de  $F_2$ , et par suite  $\dim(F_2) = 2$ .

Ensuite on a :

$$\begin{aligned}(a, b, c) \in F_1 \cap F_2 &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (a, b, c) = \alpha(0, 1, -1) + \beta(0, 1, 1) \\ \text{et} \\ (a, b, c) = \gamma(0, 1, 2) + \lambda(2, 3, 4) \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R} : \alpha(0, 1, -1) + \beta(0, 1, 1) = \gamma(0, 1, 2) + \lambda(2, 3, 4) \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R} : (0, \alpha + \beta, -\alpha + \beta) = (2\lambda, \gamma + 3\lambda, 2\gamma + 4\lambda) \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} 0 = 2\lambda \\ \alpha + \beta = \gamma + 3\lambda \\ -\alpha + \beta = 2\gamma + 4\lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = \frac{-1}{2}\gamma \\ \beta = \frac{3}{2}\gamma \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(a, b, c) \in F_1 \cap F_2 \iff \exists \gamma \in \mathbb{R} : (a, b, c) = \gamma(0, 1, 2) \quad (\text{car } \lambda = 0)$$

D'où

$$F_1 \cap F_2 = \text{vect}(\{(0, 1, 2)\}) = \{\gamma(0, 1, 2) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Et l'on a  $\dim(F_1 \cap F_2) = 1$ .

Par définition on a :

$$F_1 + F_2 = \{x + y \mid x \in F_1 \text{ et } y \in F_2\}$$

$$= \{(\alpha(0, 1, -1) + \beta(0, 1, 1)) + (\gamma(0, 1, 2) + \lambda(2, 3, 4)) \mid \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La famille  $\{(0, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 3, 4)\}$  est donc génératrice de  $F_1 + F_2$ .

En plus pour  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$  et par des équivalences logiques on a :

$$\begin{aligned} & \alpha(0, 1, -1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 1, 2) + \lambda(2, 3, 4) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \iff & (2\lambda, \alpha + \beta + \gamma + 3\lambda, -\alpha + \beta + 2\gamma + 4\lambda) = (0, 0, 0) \\ \iff & \begin{cases} 2\lambda & = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + 3\lambda & = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma + 4\lambda & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda & = 0 \\ 2\alpha - \gamma & = 0 \\ 2\beta + 3\gamma & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda & = 0 \\ \alpha & = \frac{1}{2}\gamma \\ \beta & = -\frac{3}{2}\gamma \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \text{pour tout } \gamma \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}\gamma(0, 1, -1) + \frac{-3}{2}\gamma(0, 1, 1) + \gamma(0, 1, 2) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{ce qui équivaut à} & \quad \frac{1}{2}(0, 1, -1) + \frac{-3}{2}(0, 1, 1) + (0, 1, 2) = (0, 0, 0) \\ \text{ce qui signifie que} & \quad (0, 1, 2) = \frac{-1}{2}(0, 1, -1) + \frac{3}{2}(0, 1, 1) \end{aligned}$$

Par conséquent la famille  $\{(0, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 3, 4)\}$  est liée et la famille  $\{(0, 1, -1), (0, 1, 1), (2, 3, 4)\}$  est libre et génératrice de  $F_1 + F_2$ . Donc c'est une base et  $\dim(F_1 + F_2) = 3$ .

Puisque  $F_1 + F_2$  est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^3$  et  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , alors  $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ .

### Remarque :

On aurait pu utiliser le résultat suivant :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Puisque  $F_1 + F_2$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}^3$  et  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , alors  $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ .

– On sait que  $\{(0, 1, 2), (2, 3, 4)\}$  est une base de  $F_2$ . Alors

$$\begin{aligned} x = (1, \alpha, 2) \in F_2 & \iff \exists a, b \in \mathbb{R} \mid (1, \alpha, 2) = a(0, 1, 2) + b(2, 3, 4) = (2b, a + 3b, 2a + 4b) \\ \iff & \begin{cases} 2b & = 1 \\ a + 3b & = \alpha \\ 2a + 4b & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b & = \frac{1}{2} \\ \alpha & = \frac{3}{2} \\ a & = \frac{2 - 4b}{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et l'on obtient finalement

$$(1, \alpha, 2) \in F_2 \iff \alpha = \frac{3}{2}$$